Theoretische Informatik 2

Tutorium #3 2.5.2002

(Fabian Wleklinski)

Aufgabe 3.1 – Nerode Index

- Nerode-Relation:
  - Seite 30!
  - ($x \equiv_L y$) g.d.w. ($\forall w$: $xw \in L \Leftrightarrow yw \in L$)
  - auf **WÖRTERN** definiert, nicht auf DFAs
  - Index = Zustandszahl des minimalen DFAs!
- Nerode-Automat
  - minimal!
  - d.h. isomorph zu jedem anderen minimalen DFA!
  - Ä'-Klassen werden zu Zuständen!
  - rein **gedankliches** Konstrukt, beweist die Minimalität des Äquivalenzklassen-DFAs!

Aufgabe 3.1 – Nerode Index

a) **$Idx(L\bullet\Sigma^*) \leq Idx(L)$**
- **Ja!**
- Füge für jeden akzeptierenden Zustand, und jedes Eingabesymbol eine **Selbstschleife** ein:
  – $\forall f\in F, a\in\Sigma: \delta(f,a):=f$
- Berechnungen werden also bei Akzeptanz „**eingefangen**“!!

b) **$Idx(L_1 \cap L_2) \leq Idx(L_1) \cdot Idx(L_2)$**
- **Ja!**
- Baue **2 min. DFA‘s**:
  $A_1 := (Q_1,\Sigma,\delta_1,q_{0,1},F_1)$
  $A_2 := (Q_2,\Sigma,\delta_2,q_{0,2},F_2)$
- Baue dritten DFA
  $A_3 := (Q_3,\Sigma,\delta_3,[q_{0,1},q_{0,2}],F_3)$
  $Q_3 := Q_1 \times Q_2$
  $\delta_3([q_i,q_j],a):=(\delta_1(q_i,a), \delta_2(q_j,a))$
  $F_3 := \{[q_i,q_j] \mid q_i\in F_1 \wedge q_j\in F_2\}$

Aufgabe 3.1 – Nerode Index

- Eliminiere Symbole, die nur in einer Sprache vorkommen!
- $|Q| = |Q_1| \cdot |Q_2|$

◊

Aufgabe 3.2 – Schnittsprache

- Siehe 3.1 b) !!!
  - Fazit: Index bzw. Zustandszahl wächst im worst-case multiplikativ an!
- Nehme zwei Sprachen, z.B:
  - $L_1=\{a^k \mid k=0 \bmod n\}$
  - $L_2=\{a^k \mid k=0 \bmod n+1\}$
- Index?
  - $\text{Index}(L_1) = n$,
    $\text{Index}(L_2) = n+1$
- Beweis? Betrachte L_1:
  - n Worte $a^0,a^1,\ldots,a^{n-1}$ **paarweise nicht Nerode-äquivalent**!
    - $\forall i$: $(a^i \bullet a^{n-k} \in L) \Leftrightarrow (i=k)$
  - Wird ein a^i mit a^{n-i} fortgesetzt, so liegt dieses Wort in L. Für jede Fortsetzung a^j mit $j \neq i$ liegt das Wort hingegen nicht in L.
  - $\Rightarrow \text{Index}(L_1) \geq n$

Aufgabe 3.2 – Schnittsprache

- Andererseits lässt sich L_1 akzeptieren von DFA A_1:
  - $A_1 := (Q_1,\Sigma,\delta_1,q_0,F_1)$
    $\Sigma := \{a\}$
    $Q_1 := \{q_0,q_1,\ldots,q_{n-1}\}$
    $F_1 := \{q_0\}$
    $\delta(q_i,a):=q_{(i+1) \bmod n}$
- $\Rightarrow \text{Index}(L_1) = n$!!!
- Ebenso: $\text{Index}(L_2) = n+1$
- Index von $L=L_1 \cap L_2$???
  - $\text{Index}(L) = n(n+1)$?????
- $L=\{a^k \mid$
  $k=0 \bmod n \wedge$
  $k=0 \bmod n+1\}$
- $\text{ggT}(n, n+1) = 1$
  $\Rightarrow L=\{a^0, \quad a^{n(n+1)}, a^{2 \cdot n(n+1)}, \ldots\}$
- Wg. obiger Überlegungen:
  - $\text{Index}(L) = n(n+1)$
- **Fazit: Index wächst im w-c multiplikativ!**

◊

Aufgabe 3.3 – Nerode Index

a) $L_\omega = \Sigma^* \bullet \omega \bullet \Sigma^*$

- z.z: Index(L_ω)=|ω+1|
- Wann sind 2 Worte Nerode-äquivalent?
  1. beide Worte enthalten ω: äquivalent!
  2. Genau 1 Wort enthält ω: inäquivalent!
     - Zeuge: ε
  3. kein Wort enthält ω:
     - beides möglich!!
     - komplizierter...

– zwei Wörter u und v, die ω nicht enthalten, sind äquivalent, g.d. **wenn ihr längster Suffix, der auch ein Präfix von ω ist, gleich ist**!

– Die Äquivalenzklassen entsprechen also den Präfixen von ω!
  - inkl. ε + ω!

– **Index(L_ω) = |ω|+1**

◊

Aufgabe 3.3 + 3.4

b) Klammersprache

- Möglichkeit #1: Pumping-Lemma
- Möglichkeit #2:
  - alle Worte „(^{k}“ sind paarweise nicht Nerode-äquivalent!!! => Index unendlich!

◊

Aufgabe 3.4:

Siehe Skript S. 29 oben!