Theoretische Informatik 2

Tutorium #2   25.4.2002

(Fabian Wleklinski)

Wohldefiniertheit

- Bei Automaten entsprechen z.B. λ und δ Funktionen
- Funktionen dürfen einem Wert nur einen Wert zuordnen!
  - Sqrt(x) ist keine Funktion!
  - Automat wäre sonst nichtdeterministisch

Aufgabe 2.1 –“M.W.Z.K.“

- „Gesamtablauf“ als **ein Wort** modellieren
  - welche Worte sind „gültig“, welche nicht?
  - d.h. „eine Überfahrt“ ist **einzelnes Symbol**
  - Σ={M,W,Z,K}
- 1 Startzustand: Alle am Ufer
- 1 Endzustand: Alle auf der anderen Seite

- 16 Uferbesetzungen:
  - (16 Teilmengen aus {M,W,Z,K} J)
- Verboten sind 6 Stück!
  - WZ | ZK | WZK
  - => MK | MW | M
- 10 Zustände hinschreiben
- Start- und Endzustand auszeichnen
- mögliche Zustandsübergänge einzeichnen
- fertig!

Aufgabe 2.2 – REG. Sprachen

- a) Nein! Gegenbeispiel:
  - L:= Menge aller Wörter über {0,1}, s.d. # der Einsen nicht durch 3 teilbar ist!
  - DFA mit 1 Zustand?
    - DFA ist nach 3*n+1 Einsen im Zustand q
    - nach 3*n+2 Einsen auch in q!
    - DFA wechselt für Symbol „1“ von q nach q!
    - DFA akzeptiert 3*n+3 !!!
- √

- b) Nein! Gegenbeispiel:
  - L:=alle Wörter über {0,1}
  - L‘ sei $\{0^n1^n\} \subset L \notin$ REG!!
- √
- c) Ja!
  - baue DFA für L
  - F‘ := alle Zustände, von denen F aus erreichbar ist
  - (F‘ kann mit Tiefen-/Breitensuche in $O(|Q| \cdot |\Sigma|)$ ermittelt werden!)
- √

Aufgabe 2.3 – DFA Algorithmen

a)

- Weg von q_0 nach F?
- Tiefen- oder Breitensuche: $O(|Q| \cdot |\Sigma|)$

b)

- Entferne alle Zustände, von denen aus F nicht erreichbar ist!
- Gibt es Kreis im DFA?
- Tiefen- oder Breitensuche: $O(|Q| \cdot |\Sigma|)$

c)

- $A=(Q_A,\Sigma,\delta_A,q_0,F_A)$
- $B=(Q_B,\Sigma,\delta_B,q_0,F_B)$
- Konstruiere DFA C, so daß:
  - $L(A)=L(B) \Leftrightarrow L(C)=\emptyset$
  - „Differenzautomat" !!!
- $C := (Q_C , \Sigma , \delta_C , q_0 , F_C)$
  - $Q_C := Q_C \times Q_B$
  - $\delta_C(q_1 \times q_2 , a) := (\delta_A(q_1,a) , \delta_B(q_2,a))$
  - $F_C := F_A \times (Q_B-F_B) \cup (Q_A-F_A) \times F_B$

Aufgabe 2.3 – DFA Algorithmen

- Was macht DFA C?
  - (C akzeptiert) $\Leftrightarrow$ (A akzeptiert) XOR (B akzeptiert)!
  - $L(C)=\emptyset \Leftrightarrow$ jedes Wort entweder **von A und B** akzeptiert wird, **oder von keinem**!
  - nach Aufgabenteil a) lässt sich alg. überprüfen, ob L(C) leer ist oder nicht!

Aufgabe 2.4 – Mealy-Automaten

- DFA
  - $D=(Q,\Sigma,\delta,q_0,\mathbf{F})$
- Mealy
  - kein F!
  - Gamma + Lamda!
  - $A=(Q,\Sigma,\Gamma,\delta,\lambda,q_0)$
  - $\lambda:Q\times\Sigma\rightarrow\Gamma$
    - „Ausgabefunktion“ !!!
  - Outputstrings statt j/n!
  - „Eine Funktion, die Texte berechnet“
- Äquivalenzklassen-automat?

- Def. λ auch für Worte:
  - siehe Skript S. 17
  - Für $a\in\Sigma, w\in\Sigma^*, q\in Q$:
    $\lambda(q,aw) :=$
    $\lambda(q,a) \bullet \lambda(\ \delta(q,a)\ ,w)$
- p,q „äuivalent“, g.d.w
  - $\lambda(p,w)=\lambda(q,w)\ \forall w\in\Sigma^*$
- Äquivalenzklassen:
  - $[p] := \{q\in Q \mid p \equiv_A q\}$

Aufgabe 2.4 – Mealy-Automaten

- Äquivalenzklassen-automat:
  - $A' := (Q',\Sigma,\Gamma,\delta',\lambda',[q0])$
    - $Q' := \{[q] : q\in Q\}$
    - $\delta'([q],a) := [\delta(q,a)]$
    - $\lambda'([q],a) := \lambda'(q,a)$

- Wohldefiniertheit der Ausgabefunktion?
  - $p \equiv_A q$, $a\in\Sigma$:
  - $\lambda'([p],a) = \lambda(p,a) = \lambda(q,a) = \lambda'([q],a)$
  - Ausgabe einer Klasse unabhängig v. Repräsentant!

Aufgabe 2.4 – Mealy-Automaten

- Wohldefiniertheit der Übergangsfunktion?
  - $p \equiv_A q$, $a \in \Sigma$, $w \in \Sigma^*$
    $\lambda(p,a) \bullet \lambda(\delta(p,a),w) =$
    $\lambda(p,aw) = \lambda(q,aw) =$
    $= \lambda(q,a) \bullet \lambda(\delta(q,a),w)$
  - Insbesondere:
    $\lambda(\mathbf{p},a) = \delta(\mathbf{q},a)$
  - $\lambda(\delta(\mathbf{p},a),w) = \lambda(\delta(\mathbf{q},a),w)$
  - $\delta(\mathbf{p},a)$ und $\delta(\mathbf{q},a)$ sind äquivalent!
  - $\Rightarrow [\delta(\mathbf{p},a)] = [\delta(\mathbf{q},a)]$
  - $\Rightarrow \delta'([\mathbf{p}],a) = \delta'([\mathbf{q}],a)$
- wohldefiniert!
  - A und A‘ berechnen dieselbe Funktion:
    $f : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$
- $\surd$