

Aufgabe 20

a) *Behauptung:* $L_1 \stackrel{\text{Def}}{=} \{wcw | w \in \{0,1\}^n\}$ für ein festes $n \in \mathbb{N}$ ist eine reguläre Sprache.

Beweis: Man betrachte DFAs M_i , die genau 1 Wort aus L_1 erkennen. Z.B. $n = 2$: M_1 akzeptiert $\{00c00\}$, M_2 $\{01c01\}$, M_3 $\{10c10\}$, M_4 $\{11c11\}$. Zu einem gegebenen $n \in \mathbb{N}$ gibt es also genau 2^n solcher M_i 's, also endlich viele. L_1 ist dann die endliche Vereinigung regulärer Mengen und damit ebenfalls regulär.

b) *Behauptung:* $L_2 \stackrel{\text{Def}}{=} \{wcw | w \in \{0,1\}^*\}$ ist *nicht* regulär.

Beweis: Angenommen, L_2 sei regulär. Dann gibt es nach dem Pumping-Lemma eine Konstante $n \in \mathbb{N}$ und für das Wort $\{0^n c 0^n\} \in L_2$ gibt es eine Zerlegung $0^n c 0^n = xyz$ mit $0 \leq |y| \leq n$ und $xy^i z \in L_2$ für alle $i \geq 0$. Drei mögliche Fälle können eintreten:

1. y enthält ein c , dann enthält $xy^2 z \in L_2$ $2c$ ✗
2. y enthält kein c , z enthält ein c . Dann befinden sich durch Pumpen links vom c mehr Nullen als rechts \Rightarrow Wort nicht in L_2 ✗
3. Analog zu 2: y enthält kein c , x enthält ein c . Durch Pumpen befinden sich rechts vom c mehr Nullen als links \Rightarrow Wort nicht in L_2 ✗

Damit ist L_2 keine reguläre Sprache.

c) *Behauptung:* $L_3 \stackrel{\text{Def}}{=} \{w \in \{0\}^* | |w| \neq 2^n \forall n \in \mathbb{N}\}$ ist keine reguläre Sprache.

Beweis: Angenommen, L_3 sei regulär. Dann ist auch das Komplement $\overline{L_3} = \{w \in \{0\}^* | |w| = 2^n \forall n \in \mathbb{N}\}$ eine reguläre Sprache. Sei n die Konstante des Pumping-Lemmas und $2^m > n$. Dann besitzt $w = 0^{2^m}$ eine Zerlegung $w = xyz$ mit $0 \leq |y| \leq n$ und $xy^2 z \in \overline{L_3}$, d.h. $|xy^2 z|$ ist die Zerlegung.

Es gilt: $2^m < 2^m + 1 \leq |xy^2 z| < 2^m + n < 2^m + 2^m = 2^m \cdot 2 = 2^{m+1} \Rightarrow |xy^2 z|$ ist keine Zweier-Potenz ✗

d) *Behauptung:* $L_4 \stackrel{\text{Def}}{=} \{ww^R | w \in \{0,1\}^*\}$ ist keine reguläre Sprache.

Beweis: Über Abschlußeigenschaften. Angenommen, L_4 ist regulär. Dann ist auch $L'_4 = L_4 \cap \{0^r 1^s 0^n | r, s, n \geq 0\} = \{0^n 1^{2r} 0^n | n, r \geq 0\}$ regulär. Man betrachte einen Homomorphismus h_1 mit $h_1(a) = 0, h_1(b) = 0, h_1(1) = 1$. Dann ist $L''_4 = h_1^{-1}(L'_4) \cap \{a^r 1^s b^n | r, s, n \geq 0\} = \{a^n 1^{2r} b^n\}$ ebenfalls regulär. Man betrachte einen weiteren Homomorphismus h_2 mit $h_2(a) = a, h_2(1) = \varepsilon, h_2(b) = b$. Dann ist $h_2(L''_4) = \{a^n b^n | n \geq 0\}$ ebenfalls regulär ✗

Aufgabe 21

Behauptung: $L \stackrel{\text{Def}}{=} \{0^i 1^j | i, j \geq 1 \wedge \text{ggT}(i, j) = 1\}$ ist nicht regulär.

Beweis: Angenommen, L sei regulär. Dann gibt es nach dem Pumping-Lemma ein $n \in \mathbb{N}$, so daß für $w \in L$ mit $|w| \geq n$ gilt: $w = xyz, 0 < |y| < n, xy^i z \in L \forall i \geq 0$. Sei $w = 0^n 1^{n'}$ mit n' ist die kleinste Primzahl größer als n . Dann ist $\text{ggT}(n, n') = 1 \Rightarrow w \in L$. Es ist $|w| \geq n$, also gibt es die Zerlegung $w = xyz$.

Angenommen, y enthalte Nullen und Einsen. Dies würde einen Widerspruch beim Pumpen ergeben, da das resultierende Wort nicht mehr in L wäre. y enthält also entweder nur Nullen oder nur Einsen.

o.B.d.A. enthalte y nur Nullen. Dann ist $w = xyz_1 z_2$ mit $z_1 \in \{0\}^*, z_2 \in \{1\}^*$. $|xyz_1| = n$ und $z_2 = n' \Rightarrow n = |y| + |xz_1| = s + r$ mit $0 < s < n, r > 0$. n' ist eine Primzahl $\Rightarrow \text{ggT}(s, n') = 1$. Nach Folgerung aus dem gegebenen Satz gibt es $u, v \in \mathbb{Z}$ mit $n < 0, r > 0$ und $us + vn' = 1$.

$$u < 0 \Rightarrow u = -|n|.$$

$$\begin{aligned} us + rn' = 1 &\Leftrightarrow urs + vrn' = r \\ &\Leftrightarrow -|n|rs + vrn' = r \\ &\Leftrightarrow r|n|s + r = vrn' \end{aligned}$$

mit $r, |n|, s, v > 0$.

Nach dem Pumping-Lemma gilt $xy^{r|u|}z \in L$, d.h. $\text{ggT}(|xy^{r|u|}z_1|, |z_1|) = 1$. Aber: $|xy^{r|u|}z_1| = |y|r|u| + |xz_1| = sr|u| + r$ und $\text{ggT}(|xy^{r|u|}z_1|, |z_1|) = \text{ggT}(sr|u| + r, n') = \text{ggT}(vrn', n') = n' > 1 \nmid$

Aufgabe 22

a) $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{S\}$, $\Sigma = \{\text{op}, (,), \cdot, +\}$,
 $P = \{S \rightarrow \text{op}, S \rightarrow S + S, S \rightarrow S \cdot S, S \rightarrow (S)\}$

b) *Behauptung:* $L(G) = L$.

Beweis: Sei $w \in \Sigma^*$. Zu zeigen: $S \xRightarrow{*} w \Leftrightarrow w$ ist ein korrekt geformter arithmetischer Ausdruck (*)

Beweis durch Induktion nach $|w|$:

Verankerung: $|w| = 1$. „ \Rightarrow “: $S \xRightarrow{*} w$ mit $|w| = 1 \Rightarrow w = \text{op} \Rightarrow w$ ist ein korrekt geformter Ausdruck. ✓

„ \Leftarrow “: $w = \text{op}$ ist der einzige korrekt geformte Ausdruck mit der Länge 1. ✓

$|w| = n + 1$: (*) gilt für $|w'| \leq n$.

„ \Rightarrow “: $S \xRightarrow{*} w, |w| > 1 \Rightarrow w \neq \text{op}$, also gibt es 3 Fälle:

1. $S \rightarrow S + S \xRightarrow{*} w_1 + w_2 = w$ mit $S \xRightarrow{*} w_1, S \xRightarrow{*} w_2$
2. $S \rightarrow S \cdot S \xRightarrow{*} w_1 \cdot w_2 = w$

$$3. S \rightarrow (S) \xRightarrow{*} (w_1) = w$$

In jedem Fall ist $|w_1| \leq n, |w_2| \leq n$, damit sind w_1 und w_2 nach Induktionsvoraussetzung korrekt geformt und damit auch $w_1 + w_2, w_1 \cdot w_2, (w_1)$ ✓

„ \Leftarrow “: w ist ein korrekt geformter Ausdruck der Länge $n + 1$. Damit enthält w nicht nur op, sondern mindestens ein $+$, \cdot oder Klammern.

$$\left. \begin{array}{l} 1. w = w_1 + w_2 \\ 2. w = w_1 \cdot w_2 \\ 3. w = (w_1) \end{array} \right\} w_1 \text{ und } w_2 \text{ sind korrekt geformte Ausdrücke } \leq n$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt: $S \xRightarrow{*} w_1, S \xRightarrow{*} w_2$. Damit gilt

1. $S \rightarrow S + S \xRightarrow{*} w_1 + S \xRightarrow{*} w_1 + w_2 = w$
2. $S \rightarrow S \cdot S \xRightarrow{*} w_1 \cdot S \xRightarrow{*} w_1 \cdot w_2 = w$
3. $S \rightarrow (S) \xRightarrow{*} (w_1) = w$

Es gilt also immer: $S \xRightarrow{*} w$ mit $|w| = n + 1$ □

Aufgabe 23

Die Grammatik $G = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{a, b\}, P, S)$ mit

$$P \stackrel{\text{Def}}{=} \left\{ \begin{array}{ll} S \rightarrow AE|BE|C & A \rightarrow aAa|B \\ B \rightarrow bB|bb & C \rightarrow aCaa|D \\ D \rightarrow baD|abD|aa & E \rightarrow EE|\varepsilon \end{array} \right\}$$

ist in eine reduzierte kontextfreie Grammatik zu überführen.

Nach Satz S. 53 im Skript ist eine kontextfreie Grammatik reduziert, wenn

1. $\forall A \in \{V - \Sigma\} : (A \rightarrow \varepsilon) \notin P$
2. $S \rightarrow \varepsilon \Leftrightarrow \varepsilon \in L$
3. S erscheint auf *keiner* rechten Seite.

1. Schritt: Anwendung Algorithmus S. 53

$$V_1 = \{E\} \quad V_2 = \{E\} \cup \{E\} \Rightarrow V_n = \{E\}$$

$$P_1 = P \cup \{S \rightarrow A, S \rightarrow B, E \rightarrow E\}$$

$$P_2 = P_1 \setminus \{E \rightarrow E\}$$

$$P' = P_2 \cup \{S' \rightarrow S\}$$

Man erhält $G' = (\{S, S', A, B, C, D, E\}, \{a, b\}, P', S')$

$$P' = \left\{ \begin{array}{ll} S \rightarrow AE|BE|C|A|B & A \rightarrow aAa|B \\ B \rightarrow bB|bb & C \rightarrow aaCaa|D \\ D \rightarrow baD|abD|aa & E \rightarrow EE|E \\ S' \rightarrow S & \end{array} \right\}$$

G' erfüllt die gewünschten Eigenschaften.

2. Schritt: Anwendung Algorithmus S. 59; Beseitigung zyklischer Produktionen

$$V_{S'}^{(1)} = \{S\}$$

$$V_{S'}^{(2)} = \{S\} \cup \{A, B, C\} = \{S, A, B, C\}$$

$$V_{S'}^{(3)} = \{S, A, B, C\} \cup \{A, B, C, D\} = \{S, A, B, C, D\}$$

$$V_{S'}^{(4)} = \{S, A, B, C, D\} \cup \{A, B, C, D\} = \{S, A, B, C, D\} = V_{S'}^{(N)}$$

$$V_S^{(1)} = \{A, B, C\}$$

$$V_S^{(2)} = \{A, B, C, D\}$$

$$V_S^{(3)} = \{A, B, C, D\} = V_S^{(N)}$$

$$V_A^{(1)} = \{B\}$$

$$V_A^{(2)} = \{B\} = V_A^{(N)}$$

$$V_B^{(1)} = \emptyset = V_B^{(N)}$$

$$V_C^{(1)} = \{D\}$$

$$V_C^{(2)} = \{D\} = V_C^{(N)}$$

$$V_D^{(1)} = \emptyset = V_D^{(N)}$$

$$V_E^{(1)} = \{E\}$$

$$V_E^{(2)} = \{E\} = V_E^{(N)}$$

$$G'' = (\{S', S, A, B, C, D, E\}, \{a, b\}, P'', S')$$

$$P'' = (P' \setminus \{S \rightarrow A|B|C, A \rightarrow B, C \rightarrow D, E \rightarrow E, S' \rightarrow S\})$$

$$\cup \{S' \rightarrow AE|BE|aAa|bB|bb|aCaa|baD|abD|aa,$$

$$S \rightarrow aAa|bB|bb|aCaa|baD|abD|aa,$$

$$A \rightarrow bB, C \rightarrow baD|abD|aa, E \rightarrow EE\}$$

Nach Skript S. 56 erhalten wir:

$$P'' = \left\{ \begin{array}{l} S' \rightarrow AE|BE|aAa|bB|bb|aCaa|baD|abD|aa \\ S \rightarrow AE|BE|aAa|bB|bb|aCaa|baD|abD|aa \\ A \rightarrow aAa|bB|bb \\ B \rightarrow bB|bb \\ C \rightarrow baD|abD|aCaa|aa \\ D \rightarrow baD|abD|aa \\ E \rightarrow EE \end{array} \right\}$$

Schritt 3: Skript S. 55; Beseitigen überflüssiger Symbole

1

$$\begin{aligned} V_1 &= \{S', S, A, B, C, D\} \\ V_2 &= \{S', S, A, B, C, D\} = V_N \\ \bar{G} &= (\bar{V}, \{a, b\}, \bar{P}, S') \\ \bar{V} &= \{S', S, A, B, C, D\} \cup \{a, b\} \\ \bar{P} &= P'' \cap (\bar{V} \times \bar{V}^*) \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow \bar{P} = P'' \setminus \{S' \rightarrow AE|BE, S \rightarrow AE|BE, E \rightarrow EE\}$$

2

$$\begin{aligned} H_0 &= \{S'\} \\ H_1 &= \{S'\} \cup \{A, B, C, D\} = \{S', A, B, C, D\} \\ H_2 &= \{S', A, B, C, D\} = H_N \\ G''' &= (V''', \{a, b\}, P''', S') \text{ mit} \\ V''' &= \{S', A, B, C, D\} \cup \{a, b'\}, P''' = \bar{P} \cap (V''' \times (V''')^*) \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow P''' = \left\{ \begin{array}{l} S' \rightarrow aAa|bB|bb|aCaa|baD|abD|aa \\ A \rightarrow aAa|bB|bb \\ B \rightarrow bB|bb \\ C \rightarrow aCaa|baD|abD|aa \\ D \rightarrow baD|abD|aa \end{array} \right\}$$

zu Aufgabe 21

In der Aufgabenstellung war folgender Satz gegeben:

$$\text{Zu } i, j \in \mathbb{Z} \text{ existieren } u, v \in \mathbb{Z} \text{ mit } ui + vj = 1$$

Daraus läßt sich folgende Folgerung ableiten:

$$\text{Zu } i, j \in \mathbb{N} \ (i, j \geq 1) \text{ mit } \text{ggT}(i, j) = 1 \text{ gibt es } u, v \in \mathbb{Z} \text{ mit } uv + vj = 1 \text{ und } u < 0, v > 0$$

Beweis: Nach dem Satz existieren $u, v \in \mathbb{Z}$ mit $ui + vj = 1$. Da $i > 0, j > 0$ ist $u \leq 0$ und $v \geq 0$ oder $u \geq 0$ und $v \leq 0$. Für den ersten Fall ist die Folgerung bereits bewiesen.

Sei also $u \geq v$ und $r \leq 0$, dann gilt

$$\begin{aligned} ui + vj = 1 &\Leftrightarrow ui - uij + uij + vj = 1 \\ &\Leftrightarrow i(u - uj) + j(v + ui) = 1 \text{ mit } (u - uj) =: u' \leq 0 \text{ und } (v + ui) =: v' \geq 0 \end{aligned}$$

Also ist $u'i + v'j = 1$ \square

Es soll gelten $u < 0, v > 0$ bzw. $u' < 0, v' > 0$.

$$u = 0 \Rightarrow vj = 1 \Rightarrow j = 1 \quad \text{!}$$

$$v = 0 \Rightarrow ui = 1 \Rightarrow i = 1 \quad \text{!}$$

$$u' = 0 \Rightarrow n - nj = 0 \Rightarrow j = 1 \quad \text{!}$$

$$v' = 0 \Rightarrow v' = -ui \Rightarrow -v + vj = 1 \Rightarrow v(j - 1) = 1 \Rightarrow j = \frac{1}{v} + 1 \Rightarrow i = 0, \text{ da } v < 0 \quad \text{!}$$