

Aufgabe 1

a)

Gegeben: algebraische Strukturen $\langle M_1, \circ_1 \rangle$, $\langle M_2, \circ_2 \rangle$. Homomorphismus $h : M_1 \rightarrow M_2$. $\langle M_2, \circ_2 \rangle$ assoziativ, h injektiv.

Zu zeigen: $\langle M_1, \circ_1 \rangle$ ist assoziativ, d.h. $\forall a_n \in M_1 : a_1 \circ_1 (a_2 \circ_1 a_3) = (a_1 \circ_1 a_2) \circ_1 a_3$.

Seien $a_1, a_2, a_3 \in M_1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} h(a_1 \circ_1 (a_2 \circ_1 a_3)) &= h(a_1) \circ_2 h(a_2 \circ_1 a_3) \\ &= h(a_1) \circ_2 (h(a_2) \circ_2 h(a_3)) \\ &= (h(a_1) \circ_2 h(a_2)) \circ_2 h(a_3) \\ &= h((a_1 \circ_1 a_2) \circ_1 a_3) \\ &= h((a_1 \circ_1 a_2) \circ_1 a_3) \end{aligned}$$

Es gilt $h(a_1 \circ_1 (a_2 \circ_1 a_3)) = h((a_1 \circ_1 a_2) \circ_1 a_3)$. Da h injektiv ist, folgt:

$$a_1 \circ_1 (a_2 \circ_1 a_3) = (a_1 \circ_1 a_2) \circ_1 a_3 \quad \square$$

b)

Gegeben: algebraische Strukturen $\langle M_1, \circ_1 \rangle$, $\langle M_2, \circ_2 \rangle$, Homomorphismus $h : M_1 \rightarrow M_2$, $\langle M_1, \circ_1 \rangle$ assoziativ, h surjektiv.

Zu zeigen: $\langle M_2, \circ_2 \rangle$ assoziativ, d.h. $\forall b_{1,2,3} \in M_2 : b_1 \circ_2 (b_2 \circ_2 b_3) = (b_1 \circ_2 b_2) \circ_2 b_3$.

Seien $b_1, b_2, b_3 \in M_2$. Dann gibt es, da h surjektiv ist, $a_1, a_2, a_3 \in M_1$, so daß $h(a_1) = b_1$, $h(a_2) = b_2$, $h(a_3) = b_3$.

Es gilt:

$$\begin{aligned} b_1 \circ_2 (b_2 \circ_2 b_3) &= h(a_1) \circ_2 (h(a_2) \circ_2 h(a_3)) \\ &= h(a_1) \circ_2 (h(a_2 \circ_1 a_3)) \\ &= h(a_1 \circ_1 (a_2 \circ_1 a_3)) \\ &= h((a_1 \circ_1 a_2) \circ_1 a_3) \\ &= h(a_1 \circ_1 a_2) \circ_2 h(a_3) \\ &= (h(a_1) \circ_2 h(a_2)) \circ_2 h(a_3) \\ &= (b_1 \circ_2 b_2) \circ_2 b_3 \quad \square \end{aligned}$$

Aufgabe 2

a), b)

Gegeben: Abbildung $h : \Sigma \rightarrow \Delta^*$. Zu zeigen: Es gibt genau einen Homomorphismus $\tilde{h} : \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$ mit $\tilde{h}(a) = h(a) \forall a \in \Sigma$. Gezeigt werden müssen Existenz und Eindeutigkeit.

Existenz: Man definiere $\tilde{h} : \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$ durch $\tilde{h}(w) = h(a_1) \cdot h(a_2) \cdot \dots \cdot h(a_n)$ für $w = a_1 a_2 \dots a_n$, $a_i \in \Sigma$, $1 \leq i \leq n$.

$\Rightarrow \tilde{h}$ ist eine Abbildung $\Sigma^* \rightarrow \Delta^*$ ✓

$\Rightarrow \tilde{h}$ ist ein Homomorphismus. Für alle $u, v \in \Sigma^*$ gilt $h(uv) = h(u) \cdot h(v)$, $u = a_1 \dots a_m$, $v = b_1 \dots b_n$, $a_i \in \Sigma$, $1 \leq i \leq m$, $b_i \in \Sigma$, $1 \leq i \leq n$. $\tilde{h}(uv) = (h(a_1) \dots h(a_m))(h(b_1) \dots h(b_n)) = \tilde{h}(u) \cdot \tilde{h}(v)$ □

Eindeutigkeit: Seien $\bar{h}, \tilde{h} : \Sigma^* \rightarrow \Delta^*$ Homomorphismen mit $\bar{h}(a) = \tilde{h}(a) = h(a) \forall a \in \Sigma$. Sei $w = a_1 a_2 \dots a_n \in \Sigma$ beliebig.

$$\begin{aligned} \tilde{h}(w) &= \tilde{h}(a_1) \cdot \dots \cdot \tilde{h}(a_n) \\ &= h(a_1) \cdot \dots \cdot h(a_n) \\ &= \bar{h}(a_1) \cdot \dots \cdot \bar{h}(a_n) \\ &= \bar{h}(w) \\ \Rightarrow \tilde{h} &= \bar{h} \quad \square \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Gegeben: Menge A , Relation $R \subset A \times A$, R transitiv. Beweise oder widerlege:

a)

$R_1 : (a, b) \in R_1 \stackrel{\text{def}}{\iff} (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R$ ist eine Äquivalenzrelation.

Diese Aussage ist *falsch*. Beweis durch Gegenbeispiel:

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2, 3\} \\ R &= \{(1, 2), (2, 3), (1, 3)\} \\ R_1 &= \emptyset \rightarrow \text{nicht reflexiv!} \end{aligned}$$

b)

$R_2 : (a, b) \in R_2 \stackrel{\text{def}}{\iff} ((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R) \vee (a = b)$ ist eine Äquivalenzrelation.

Diese Aussage ist *wahr*. Zu zeigen: R_2 ist reflexiv, transitiv, symmetrisch.

- Reflexivität: ✓
- Transitivität: Seien $(a, b) \in R_2$ und $(b, c) \in R_2$.
 $(a, b) \in R_2 \Leftrightarrow ((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R) \vee a = b$
 $(b, c) \in R_2 \Leftrightarrow ((b, c) \in R \wedge (c, b) \in R) \vee b = c$

Fallunterscheidung:

- $a = b$
 $(b, c) \in R_2 \Rightarrow (a, c) \in R_2$ ✓
- $b = c$
 $(a, b) \in R_2 \Rightarrow (a, c) \in R_2$ ✓
- $a \neq b \wedge b \neq c$

$$\begin{aligned} (a, b) \in R_2 \wedge (b, c) \in R_2 &\Rightarrow (a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \wedge (b, c) \in R \wedge (c, b) \in R \\ &\Rightarrow (a, c) \in R \wedge (c, a) \in R \\ &\Rightarrow (a, c) \in R_2 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a, b) \in R_2 &\Leftrightarrow ((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R) \vee a = b \\ &\Leftrightarrow ((b, a) \in R \wedge (a, b) \in R) \vee b = a \\ &\Leftrightarrow (b, a) \in R_2 \quad \checkmark \end{aligned}$$

- Symmetrie: ✓

c)

$R_3 : (a, b) \in R_3 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} (a, b) \in R \vee (b, a) \in R$ ist eine Äquivalenzrelation.

Diese Aussage ist *falsch*. Beweis durch Gegenbeispiel:

$$\begin{aligned} A &= \{1, 2\} \\ R &= \{(1, 2)\} \\ R_3 &= \{(1, 2), (2, 1)\} \rightarrow \text{nicht reflexiv!} \end{aligned}$$

d)

$R_4 : (a, b) \in R_4 \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} ((a, b) \in R \vee (b, a) \in R) \vee (a = b)$ ist eine Äquivalenzrelation.

Diese Aussage ist *falsch*. Beweis durch Gegenbeispiel:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$R = \{(1, 2), (3, 2)\}$$

$$R_4 = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

$$(1, 2) \in R_4, (2, 3) \in R_4, \text{ aber } (1, 3) \notin R_4 \rightarrow R_4 \text{ nicht transitiv!}$$

Aufgabe 4

Gegeben: Monoid $\langle M_1, \circ_1 \rangle$, algebraische Struktur $\langle M_2, \circ_2 \rangle$, Homomorphismus $h : M_1 \rightarrow M_2$.

a)

Zu zeigen: $\langle h(M_1), \circ_2 \rangle$ ist ein Monoid \rightarrow algebraische Struktur, assoziativ, neutrales Element.

- **algebraische Struktur**

Sei $b_1, b_2 \in h(M_1) \Rightarrow$ es gibt $a_1, a_2 \in M_1$ mit $h(a_1) = b_1, h(a_2) = b_2$. Ferner gilt $b_1 \circ_2 b_2 = h(a_1) \circ_2 h(a_2) = h(a_1 \circ_1 a_2)$. Wegen $a_1 \circ_1 a_2 \in M_1$ ist $h(a_1 \circ_1 a_2) \in h(M_1)$ ✓

- **Assoziativität** ✓

- **Existenz des neutralen Elementes**

$\langle M_1, \circ_1 \rangle$ ist ein Monoid \Rightarrow es gibt ein neutrales Element $\varepsilon_1 \in M_1$, so daß $a_1 \circ_1 \varepsilon_1 = \varepsilon_1 \circ_1 a_1 = a_1$ für alle $a_1 \in M_1$.

$h(\varepsilon_1)$ ist neutrales Element in $\langle h(M_1), \circ_2 \rangle$. Sei $b \in h(M_1)$. Dann gibt es ein $a \in M_1$ mit $h(a) = b$. $a \circ_1 \varepsilon_1 = \varepsilon_1 \circ_1 a = a, h(a) \circ_2 h(\varepsilon_1) = h(\varepsilon_1) \circ_2 h(a) = h(a)$ ✓

b)

Zu zeigen: $R \subseteq M_1 \times M_1 : (a, b) \in R \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} h(a) = h(b)$ ist eine Kongruenzrelation \rightarrow reflexiv, symmetrisch, transitiv, Kongruenzrelation.

- **Reflexivität** ✓

- **Symmetrie**

$$\begin{aligned} (a, b) \in R &\Leftrightarrow h(a) = h(b) \\ &\Leftrightarrow h(b) = h(a) \\ &\Leftrightarrow (b, a) \in R \quad \checkmark \end{aligned}$$

- **Transitivität**

$$\begin{aligned}
 (a, b) \in R, (b, c) \in R &\Rightarrow h(a) = h(b) \wedge h(b) = h(c) \\
 &\Rightarrow h(a) = h(c) \\
 &\Rightarrow (a, c) \in R \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

- **Kongruenzrelation**

Zu zeigen: Bei $x \sim y$ gilt für beliebige $z, z' \in M_1 : z \circ_1 x \circ_1 z' \sim z \circ_1 y \circ_1 z'$.

$$\begin{aligned}
 h(z \circ_1 x \circ_1 z') &= h(z) \circ_2 h(x) \circ_2 h(z') \\
 &= h(z) \circ_2 h(y) \circ_2 h(z') \\
 &= h(z \circ_1 y \circ_1 z') \\
 &\Rightarrow z \circ_1 x \circ_1 z' \sim z \circ_1 y \circ_1 z' \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

c)

$$[a]_R \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \{b \in M_1 \mid (a \sim b) \in R\}; M_3 = \{[a]_R \mid a \in M_1\}; \circ_3 : [a] \circ_3 [b] \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} [a \circ_1 b].$$

Zu zeigen: \circ_3 ist wohldefiniert, $\langle M_3, \circ_3 \rangle$ ist isomorph zu $\langle h(M_1), \circ_2 \rangle$.

Seien $a_1, a_2, b_1, b_2 \in M_1$ mit $a_1 \sim_R a_2, b_1 \sim_R b_2$.

$$\begin{aligned}
 [a_1] \circ_3 [b_1] &= [a_1 \circ_1 b_1] \\
 &= [a_1 \circ_1 b_2] \\
 &= [a_2 \circ_1 b_2] \\
 &= [a_2] \circ_3 [b_2]
 \end{aligned}$$