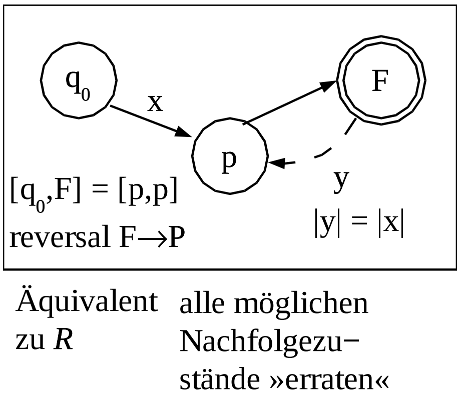
Aufgabe 12

R ist eine reguläre Sprache. Es soll gezeigt werden, daß $FH(R) \stackrel{\text{def}}{=} \{x|\exists y \in \Sigma^* : (|x| = |y| \wedge xy \in R)\}$, wobei FH für *„First Half“* steht, also die erste Hälfte des Wortes.

Idee: Sei M ein DFA, der R akzeptiert. Dieser DFA soll die erste Hälfte des Wortes, x, verarbeiten. Sobald x abgearbeitet ist, befindet sich der DFA in einem Zustand p. Ab diesem Zustand ist der Nachfolgezustand irrelevant, der Automat muß nur nach Abarbeitung von y mit $|y| = |x|$ in einem akzeptierenden Zustand F sein. Man kann sich dies so vorstellen, daß man gleichzeitig in q_0 und in F startet, wobei von F aus das Reversal-Wort y^R abgearbeitet wird. Wenn die beiden Teilautomaten sich in p treffen, wird das Wort akzeptiert.



Da $R \subset \Sigma^*$ eine reguläre Sprache ist, gibt es einen DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit $T(M) = R$. Man kontruiere einen NFA $M' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ mit $Q' = \{\underbrace{[p,q]}_{Q\times Q}|p, q \in Q\} \cup \{q_0'\}, q_0 \notin Q \times Q$.

$\delta'([p,q], \sigma) = \{[\delta(p,\sigma), q']|\exists \xi \in \Sigma : \delta(q,\xi) = q\}$ für alle $[p,q] \in Q', \sigma \in \Sigma$.

$\delta'(q_0, \sigma) = \bigcup_{f \in F}([q_0, f], \sigma)$ für alle $\sigma \in \Sigma$. $F' = \{[q,q]|q \in Q\} \cup \{q_0'|q_0 \in F\}$. Durch Induktion nach $|w|$ zeigt man: $\forall x \in \Sigma^+$ gibt es ein $p, q \in Q$. [1]

$\delta'(q_0', x) = [p,q] \Leftrightarrow \delta(q_0, x) = p \wedge \exists y \in \Sigma^*, f \in F : (|x| = |y| \wedge \delta(q,y) = f$. Damit gilt für alle $x \in \Sigma^+$:

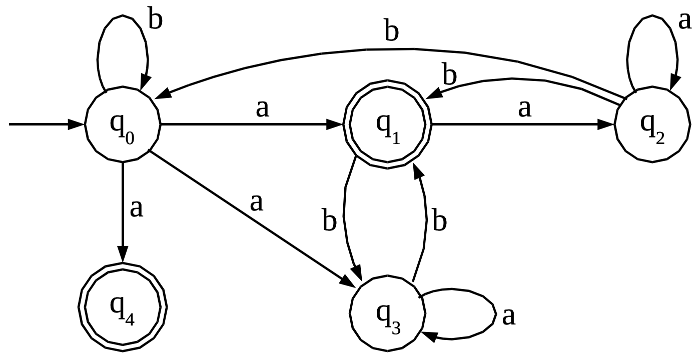
$$\begin{aligned}
x \in T(M') &\Leftrightarrow \delta'(q_0', x) \cap F' \neq \emptyset \\
&\Leftrightarrow \exists [p,q] \in F', [p,q] \in \delta'(q_0', x) \\
&\Leftrightarrow \exists [q,q] \in Q' : [q,q] \in \delta'(q_0', x) \\
&\Leftrightarrow \exists [q,q] \in Q' : \delta(q_0, x) = q \wedge \exists y \in \Sigma^*, f \in F : |x| = |y| \wedge \delta(q,y) = f \\
&\Leftrightarrow \exists y \in \Sigma^*, q \in Q, f \in F : \delta(q_0, x) = q \wedge \delta(q,y) = f \wedge |x| = |y| \\
&\Leftrightarrow \exists y \in \Sigma^* : |x| = |y| \wedge xy \in T(M) \\
&\Leftrightarrow x \in FH(T(M))
\end{aligned}$$

Wegen $\varepsilon \in T(M') \Leftrightarrow \varepsilon \in T(M)$ gilt $T(M') = FH(T(M))$. $\square$

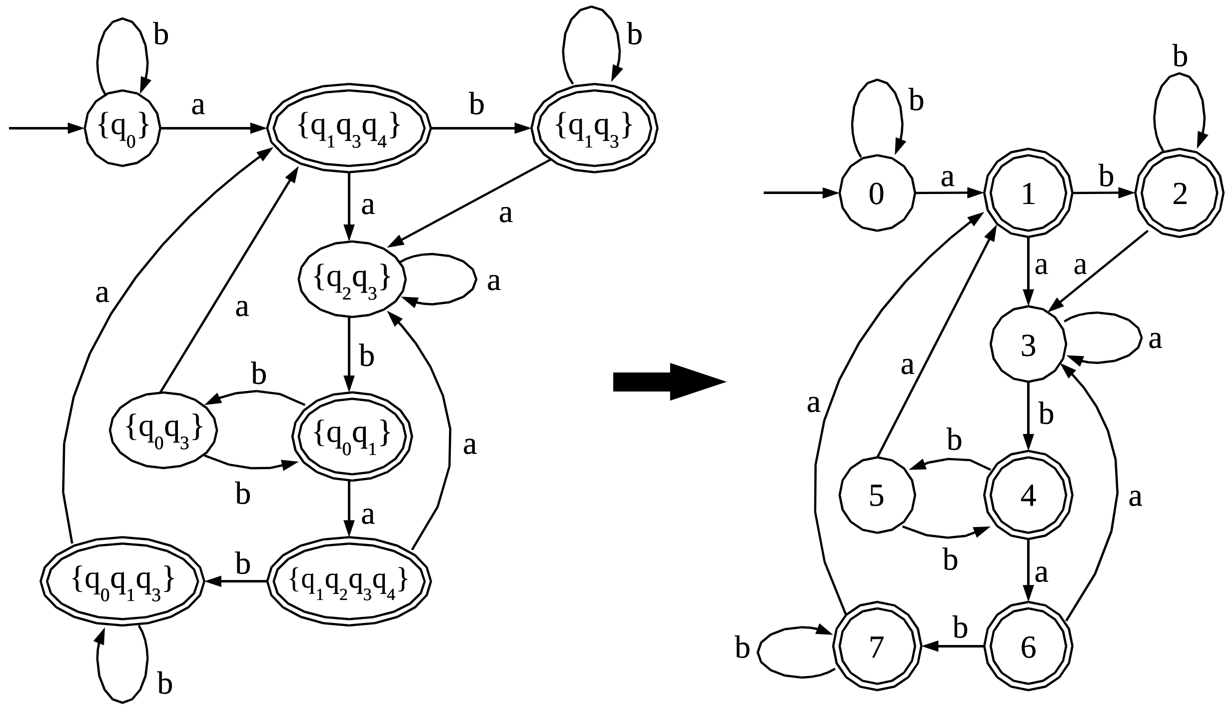
[1] Das leere Wort ist nicht enthalten, da es mit Σ in q_0' liegt

Aufgabe 13

Im Schaubild sieht der NFA wie folgt aus:



Daraus läßt sich mit der Potenzmengenkonstruktion der folgende DFA erstellen. Die Zustände werden der Einfachheit halber etwas „umgetauft“:



Dieser Automat wird nach dem bekannten Verfahren minimiert. Die Klassen der Äquivalenzrelation $\stackrel{0}{\sim}$ entsprechen den Mengen der Nicht-Ziel- und der Zielzustände:

$\stackrel{0}{\sim}$: $[0, 3, 5]$ $[1, 2, 4, 6, 7]$

Für die weiteren Äquivalenzrelationen werden die Klassen gemäß dem Verfahren aus dem Skript ermittelt, bis sich schließlich keine neuen Klassen mehr ergeben:

$\overset{1}{\sim}$:

	a	b
0	$[1,2,4,6,7]_{\overset{0}{\sim}}$	$[0,3,5]_{\overset{0}{\sim}}$
1	$[0,3,5]_{\overset{0}{\sim}}$	$[1,2,4,6,7]_{\overset{0}{\sim}}$
2	$[0,3,5]_{\overset{0}{\sim}}$	$[1,2,4,6,7]_{\overset{0}{\sim}}$
3	$[0,3,5]_{\overset{0}{\sim}}$	$[1,2,4,6,7]_{\overset{0}{\sim}}$
4	$[1,2,4,6,7]_{\overset{0}{\sim}}$	$[0,3,5]_{\overset{0}{\sim}}$
5	$[1,2,4,6,7]_{\overset{0}{\sim}}$	$[1,2,4,6,7]_{\overset{0}{\sim}}$
6	$[0,3,5]_{\overset{0}{\sim}}$	$[1,2,4,6,7]_{\overset{0}{\sim}}$
7	$[1,2,4,6,7]_{\overset{0}{\sim}}$	$[1,2,4,6,7]_{\overset{0}{\sim}}$

Zu den Klassen von $\overset{1}{\sim}$ können nun alle Zustände zusammengefaßt werden, die gleiche Zeilen haben und bereits bei $\overset{0}{\sim}$ in einer Klasse waren; dies sind hier

$$[0] \qquad [1,2,6] \qquad [3] \qquad [4] \qquad [5] \qquad [6] \qquad [7]$$

$\overset{2}{\sim}$:

	a	b
0	$[1,2,6]_{\overset{1}{\sim}}$	$[0]_{\overset{1}{\sim}}$
1	$[3]_{\overset{1}{\sim}}$	$[1,2,6]_{\overset{1}{\sim}}$
2	$[3]_{\overset{1}{\sim}}$	$[1,2,6]_{\overset{1}{\sim}}$
3	$[3]_{\overset{1}{\sim}}$	$[4]_{\overset{1}{\sim}}$
4	$[1,2,6]_{\overset{1}{\sim}}$	$[5]_{\overset{1}{\sim}}$
5	$[1,2,6]_{\overset{1}{\sim}}$	$[4]_{\overset{1}{\sim}}$
6	$[3]_{\overset{1}{\sim}}$	$[7]_{\overset{1}{\sim}}$
7	$[1,2,6]_{\overset{1}{\sim}}$	$[7]_{\overset{1}{\sim}}$

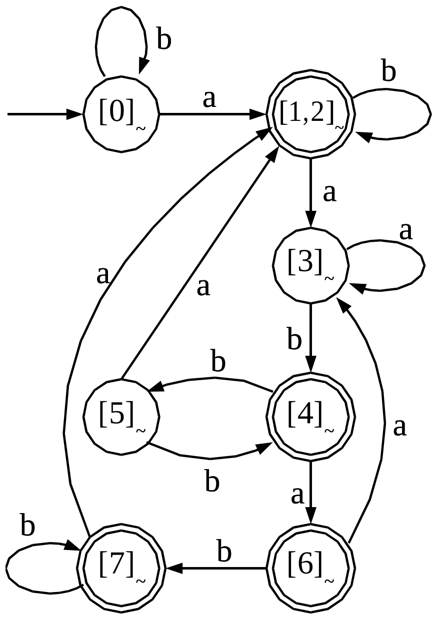
Damit sind die Klassen von $\overset{2}{\sim}$: $\quad [0] \qquad [1,2] \qquad [3] \qquad [4] \qquad [5] \qquad [6] \qquad [7]$

$\overset{3}{\sim}$:

	a	b
0	$[1,2]_{\overset{2}{\sim}}$	$[0]_{\overset{2}{\sim}}$
1	$[3]_{\overset{2}{\sim}}$	$[1,2]_{\overset{2}{\sim}}$
2	$[3]_{\overset{2}{\sim}}$	$[1,2]_{\overset{2}{\sim}}$
3	$[3]_{\overset{2}{\sim}}$	$[4]_{\overset{2}{\sim}}$
4	$[6]_{\overset{2}{\sim}}$	$[5]_{\overset{2}{\sim}}$
5	$[1,2]_{\overset{2}{\sim}}$	$[4]_{\overset{2}{\sim}}$
6	$[3]_{\overset{2}{\sim}}$	$[7]_{\overset{2}{\sim}}$
7	$[1,2]_{\overset{2}{\sim}}$	$[7]_{\overset{2}{\sim}}$

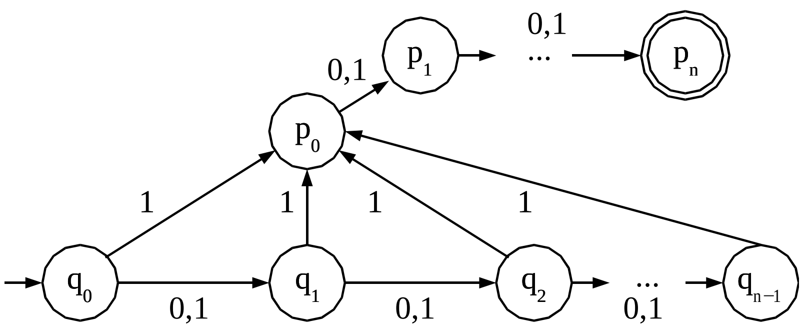
Damit sind die Klassen von $\overset{3}{\sim}$: [0] [1,2] [3] [4] [5] [6] [7]

Die Klassen von $\overset{3}{\sim}$ sind jetzt identisch zu den Klassen von $\overset{2}{\sim}$, d.h. $\overset{3}{\sim} = \overset{2}{\sim} = \sim$, das Verfahren endet hier. Der minimierte Automat sieht also so aus:



Aufgabe 14

a) Der NFA, der L_n akzeptiert, könnte wie folgt aussehen:



Nach dem Startzustand q_0 kommen zunächst maximal $n-1$ Zustände q_i, in denen das Teilwort x verarbeitet wird. Spätestens nach q_{n-1} muß dann die 1 kommen. Mit der 1 wird in Zustand p_0 gewechselt, ab dem die Abarbeitung von y beginnt. Nach p_0 müssen genau n Zeichen kommen, damit der Automat im akzeptierenden Zustand p_n landet.

Durch Induktion wird für alle $w \in \Sigma^*$ gezeigt: $q_i \in \delta(q_0, w) \Leftrightarrow |w| = i \wedge 0 \leq |w| \leq n-1$.

$p_i \in \delta(q_0, w) \Leftrightarrow w = w'1w'' \wedge |w''| = i, 0 \leq |w''| \leq n, 0 \leq |w'| \leq n-1.$

$$\begin{aligned} w \in T(M) &\Leftrightarrow \delta(q_0, w) \cap F \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow p_n \in \delta(q_0, w) \\ &\Leftrightarrow w = w'1w'', |w''| = n, 0 \leq |w'| \leq n-1 \\ &\Leftrightarrow w \in L_n \quad \Box \end{aligned}$$

b) Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein beliebiger NFA für L_n. Zu zeigen: $|Q| \geq 2n+1$.

Annahme: $|Q| \leq 2n+1$. Offensichtlich ist L_n endlich und die maximale Länge eines $w \in L$ beträgt $|w| = 2n$. Man betrachte ein solches w mit maximaler Länge.

Behauptung:

$$\forall i : 0 \leq i \leq 2n : w = w_i'w_i'', |w_i'| = i, |w_i''| = 2n-i : \exists q_i \in Q : \delta(q_0, w_i') \ni q_i \wedge \delta(q_0, w) \cap F \neq \emptyset$$

Beweis: Angenommen, q_i existiert nicht. Dann ist $\delta(q_0, w) \cap F = \emptyset$ ↯. Wegen $|Q| < 2n+1$ gibt es ein $i, j, i < j$ mit $q_i = q_j = p$. Es folgt

$$\begin{aligned} & p \in \delta(q_0, w_j') \wedge |w_j'| = j && (1) \\ & p \in \delta(q_0, w_i') \wedge |w_i'| = i && (2) \\ & \delta(p, w_j'') \cap F \neq \emptyset \wedge |w_j''| = 2n-j && (3) \\ & \delta(p, w_i'') \cap F \neq \emptyset \wedge |w_i''| = 2n-i && (4) \\ \text{Aus (1) und (4) folgt}\quad & \delta(q_0, w_j'w_i'') \supseteq \delta(p, w_i'') && (5) \\ \Rightarrow\quad & \delta(q_0, w_j'w_i'') \cap F \neq \emptyset && (6) \end{aligned}$$

Also folgt $w_j'w_i'' \in T(M)$. Es ist aber $|w_j'w_i''| = 2n - i + j > 2n+1$ ↯

c) Jeder DFA für L_n hat mehr als 2^{n+1} Zustände. Seien $w_1, w_2 \in L_n$ mit $w_1 \neq w_2$. Dann ist $w_1 = a_r a_{r-1} \ldots a_2 a_1$ und $w_2 = b_s b_{s-1} \ldots b_2 b_1$ mit o.B.d.A. $1 \leq r, s \leq n, a_i, b_i \in \Sigma$.

- $r \neq s$: mit $u = 0^{n-r-1}$ gilt $w_1 u \in L_n$ aber $w_2 u \notin L_n$ wegen $|w_2 u| > 2n$
  $\Rightarrow \delta(q_0, w_1) \neq \delta(q_0, w_2)$
- $r = s : u = 0^{n-i-1}$. $\delta(q_0, w_1 u) \neq \delta(q_0, w_2 u)$

Also $2^{n+1} - 2$ Worte plus akzeptierender Zustand plus Startzustand sind 2^{n+1}. Rest analog zu Skript.

Aufgabe 15

Die drei Aussagen entsprechen im Wesentlichen dem Satz von Myhill-Nerode, bis auf die Definition der Relation. Der Beweis kann daher in weiten Teilen analog zum Skript geführt werden.

„$1 \Rightarrow 2$“: Sei $R \subseteq \Sigma^*$ eine reguläre Sprache. Dann existiert ein DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit $T(M) = R$.

Für jedes $x \in \Sigma^*$ definiert man $\delta_x : Q \to Q$ vermöge $\delta_x(q) = \delta(q, x)$ für alle $q \in Q$. Man definiere die Relation $\sim : \sim \subseteq (\Sigma^* \times \Sigma^*)$ wie folgt:

$$\begin{aligned} x \sim y \quad &\Leftrightarrow \quad \delta_x = \delta_y \\ &\Leftrightarrow \quad \forall q \in Q : \delta(q, x) = \delta(q, y) \end{aligned}$$

Reflexivität und Symmetrie: ✓

Transitivität: Sei $x \sim y$ und $y \sim z$. Dann ist $\delta_x = \delta_y$ und $\delta_y = \delta_z$, d.h. es gilt auch $\delta_x = \delta_z$ und damit $x \sim z$. Also ist $\sim$ transitiv und eine Äquivalenzrelation.

Für jedes $x, y \in \Sigma^*$ und $q \in Q$ gilt $\delta_{xy}(q) = \delta(q, xy) = \delta(\delta(q, x), y) = \delta_y(\delta_x(q)) = \delta_x \circ d_y(q)$.

Also ist $\delta_{xy} = \delta_x \circ \delta_y$. Sei $x \sim y$ und $z \in \Sigma^*$ beliebig. Es gilt $\delta_{xz} = \delta_x \circ \delta_z = \delta_y \circ \delta_z = \delta_{yz}$. Damit ist $xz \sim yz$, und $\sim$ ist rechtsinvariant. Ebenso gilt $\delta_{zx} = \delta_z = \delta_x = \delta_z \circ \delta_y = \delta_{zy}$. Damit ist $\sim$ linksinvariant, also eine Kongruenzrelation.

$Q \to Q$: Es gibt $|Q| \cdot |Q|$ viele verschiedene Funktionen von $Q \to Q$. Damit ist der Index von $\sim$ endlich. Es ist außerdem $T(M) = \{\langle x \rangle_\sim | \delta_x(q_0) \in F\}$ $\square$