Ein MNFA wird als NFA mit mehreren Anfangszuständen definiert: $M = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$ mit $Q_0 =$ Menge von Startzuständen. Die Sprache, die der Automat akzeptiert, ist

$$T(M) = \{w \in \Sigma^* | \delta(Q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$$

Die Übergangsfunktion ist $\delta : Q \times E \rightarrow 2^Q$. Diese wird nun auf Wörter erweitert:

$$\hat{\delta} = 2^Q \times \Sigma^* \rightarrow 2^Q$$

$$\begin{aligned} \hat{\delta}(A, \varepsilon) &\stackrel{\text{def}}{=} A \forall A \in 2^Q \\ \hat{\delta}(A, w\sigma) &\stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{p \in \hat{\delta}(A,w)} \delta(p, \sigma) \forall A \in 2^Q, w \in \Sigma^*, \sigma \in \Sigma \end{aligned}$$

Konventionsgemäß sagt man: $\hat{\delta} = \delta$.

Aufgabe 9

Gegeben: MNFA $M = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$. Zu zeigen: Die Sprache $T(M)$, die dieser Automat akzeptiert, ist regulär.

Wie kann man das zeigen?

- Konstruktion eines DFA M' mit $T(M') = T(M)$
- Konstruktion eines NFA M' mit $T(M') = T(M)$
- Zeige, daß der Index der Nerode–Relation endlich ist.

Der Beweis wird hier über die Konstruktion eines DFA geführt.

Idee: Potenzmengenkonstruktion. Konstruiere DFA $M' = (Q', \Sigma, \delta', [Q_0], F')$.

$$\begin{aligned} Q' &= \{[A] | A \in 2^Q\} \\ F' &= \{[A] \in Q' | A \cap F \neq \emptyset\} \\ \delta'([A], \sigma) &= [\delta(A, \sigma)] \forall [A] \in Q', \sigma \in \Sigma \\ \\ T(M') &= T(M)? \end{aligned}$$

Durch Induktion zeigt man für alle $w \in \Sigma^*$:

$$\delta(Q_0, w) = A \Leftrightarrow \delta'([Q_0], w) = [A]$$

Für alle $w \in \Sigma^*$:

$$\begin{aligned} w \in T(M) &\Leftrightarrow \delta(Q_0, w) = A \wedge A \cup F \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \delta'([Q_0], w) = [A] \wedge [A] \in F' \\ &\Leftrightarrow w \in T(M') \end{aligned}$$

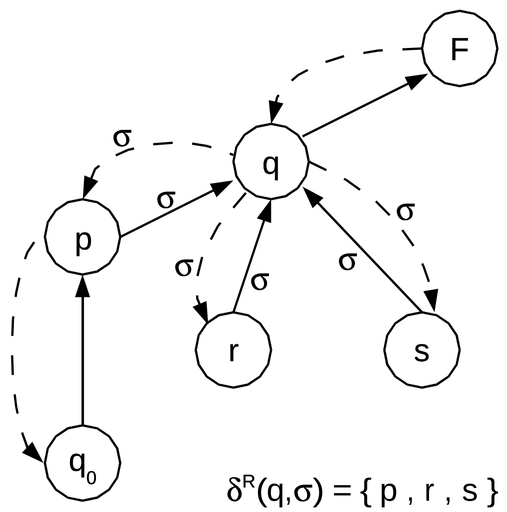
Also gilt $T(M') = T(M)$ $\square$

Anmerkung: Konstruktion eines äquivalenten NFA

$$\begin{aligned}
M'' &= (Q'', \Sigma, \delta'', q_0', F'') \\
Q'' &= Q \cup \{q_0'\}, q_0' \notin Q \\
F'' &= F \cup \{q_0' | \varepsilon \in T(M)\} \\
\delta''(q_0', \sigma) &= \delta(Q_0, \sigma) \forall \sigma \in \Sigma \\
\delta''(q, \sigma) &= \delta(q, \sigma) \forall q \in Q, \sigma \in \Sigma
\end{aligned}$$

Aufgabe 10

Idee: Der Reversal-Automat wird konstruiert, indem die Kanten im DFA umgedreht und somit seine Zielzustände zu Startzuständen und der Startzustand zum Zielzustand wird.



Zu zeigen: $T(M^R) = T(M)^R$.

Durch Induktion nach $|w|$ zeigen wir: Für alle $w \in \Sigma^*, p, q \in Q$ gilt:

$$\begin{aligned}
\delta(p, w) = q &\Leftrightarrow \delta^R(q, w^R) = p \\
n = 0 : \delta(p, \varepsilon) = q &\Leftrightarrow \delta^R(q, \varepsilon) = p, \text{ da } p = q
\end{aligned}$$

$n \to n+1$: Seien $p, q \in Q$ und $w\sigma \in \Sigma^{n+1}, \sigma \in \Sigma$.

$$\begin{aligned}
\delta(p, w\sigma) = q &\Leftrightarrow \delta(\delta(,p,w),\sigma) = q \\
&\Leftrightarrow \exists p' \in Q : \delta(p, w) = p' \wedge \delta(p', \sigma) = q \\
&\Leftrightarrow \exists p' \in Q : p' \in \delta^R(p', w^R) \wedge p' \in \delta^R(q, \sigma) \\
&\Leftrightarrow p \in \delta^R(q, (w\sigma)^R) \\
&\Leftrightarrow p \in \delta^R(q, (w\sigma)^R) \quad \square
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w \in T(M) &\Leftrightarrow \delta(q_0, w) \in F \\
&\Leftrightarrow \delta(q_0, w) = f \wedge f \in F \\
&\Leftrightarrow q_o \in \delta^R(f, w^R) \wedge f \in F \\
&\Leftrightarrow q_0 \in \delta^R(F, w^R) \\
&\Leftrightarrow \delta^R(F, w^R) \cap \{q_0\} \neq \emptyset \\
&\Leftrightarrow w^R \in T(M^R) \\
&\Leftrightarrow T(M^R) = T(M)^R \quad \square
\end{aligned}$$

Aufgabe 11

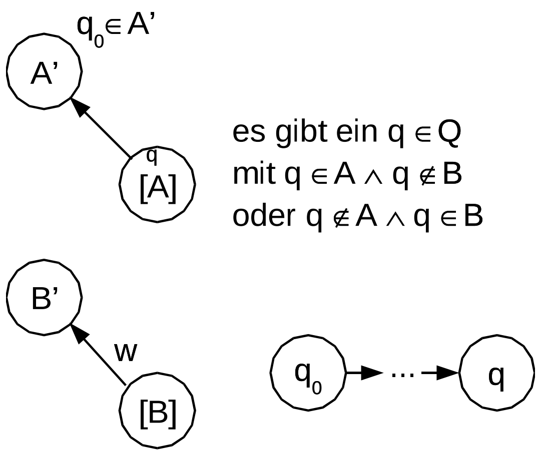
$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ist ein DFA ohne nicht erreichbare Zustände. Ein Zustand q ist erreichbar, falls es ein $w \in \Sigma^*$ gibt mit $\delta(q_0, w) = q$. M^R sei ein MNFA mit $T(M^R) = T(M)^R$ wie in Aufgabe 10. M' sei ein durch Potenzmengenkonstruktion aus M^R erzeugter DFA. Nach Aufgaben 9 und 10 ist $T(M') = T(M^R) = T(M)^R$.

Zu zeigen: M' ist ein minimaler DFA. Ein DFA ist minimal, wenn

- jeder Zustand erreichbar ist
- M' reduziert ist, d.h. $\forall [A], [B] \in Q', [A] \neq [B]$ gibt es ein $w^R \in \Sigma^*$ mit $(\delta'([A], w^R) \in F' \wedge \delta'([B], w^R) \notin F) \vee (\delta([A], w^R) \notin F' \wedge \delta'([B], w^R \in F)$.

Beweis: Jeder Zustand ist erreichbar. Noch zu zeigen: M' ist reduziert.

M ist ein DFA ohne nicht erreichbare Zustände. Es existiert $w \in \Sigma^* : \delta(q_0, w) = q$. $\delta(q_0, w) = q \Leftrightarrow \delta^R(q, w) = q_0$. Für alle $p \in Q \setminus \{q\}$: $\delta(q_0, w) \neq p, q_0 \notin \delta^R(p, w)$.



Seien $[A], [B] \in Q'$ mit $[A] \neq [B]$, dann gibt es ein $q \in R$ mit

1. $q \in A \wedge q \notin B$ oder
2. $q \notin A \wedge q \in B$.

o.B.d.A. gelte (1). Da in M jeder Zustand erreichbar ist, gibt es ein $w \in \Sigma^*$ mit $\delta(q_0, w) = q$. Aus Aufgabe 10 folgt $q_0 \in \delta^R(q, w^R)$. Wegen $q_0 \in \delta^R(q, w^R) \Leftrightarrow \delta(q_0, w) = q$ folgt $q_0 \notin \delta^R(p, w^R) \forall p \in Q$ mit $p \neq q$, denn es ist $\delta(q_0, w) \neq p$.

Damit ist $q_0 \in \delta^R(A, w^R), q_0 \notin \delta^R(B, w^r)$. Also gilt $\delta'([A], w^R) \in F', \delta'([B], w^R) \notin F'$. Damit ist M' reduziert. $\square$