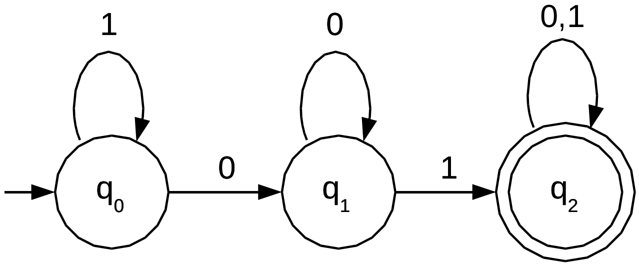
Aufgabe 5

Automat für L:



Wir zeigen durch Induktion nach $|w|$:

$$\delta(q_0, w) = q_0 \Leftrightarrow w = 1^i \text{ für ein } i \geq 0$$
$$\delta(q_0, w) = q_1 \Leftrightarrow w = 1^i 0^j \text{ für } i \geq 0, j \geq 1$$
$$\delta(q_0, w) = q_2 \Leftrightarrow w = x01y : x, y \in \Sigma^*$$

Induktionsverankerung: $|w| = 0 \ \surd \quad (|w| = 1 \ \surd\ )$

Induktionsschluß: Sei die Behauptung für alle $w \in \Sigma^*$ mit $|w| = n$ bewiesen und $x = w\sigma$ mit $|w| = n$ und $\sigma \in \Sigma$.

$$\begin{aligned}
\delta(q_0, w\sigma) = q_0 &\Leftrightarrow \delta(q_0, w) = q_0 \wedge \sigma = 1 \\
&\Leftrightarrow w = 1^i, i \geq 0 \wedge \sigma = 1 \\
&\Leftrightarrow w\sigma = 1^i, i \geq 0 \\
\delta(q_0, w\sigma) = q_1 &\Leftrightarrow (\delta(q_0, w) = q_0 \wedge \sigma = 0) \vee (\delta(q_0, w) = q_1 \wedge \sigma = 0) \\
&\Leftrightarrow (w = 1^i, i \geq 0 \wedge \sigma = 0) \vee (w = 1^i 0^j, i \geq 0, j \geq 1 \wedge \sigma = 0) \\
&\Leftrightarrow (w\sigma = 1^i 0, i \geq 0) \vee (w\sigma = 1^i 0^j, i \geq 0, j \geq 1) \\
\delta(q_0, w\sigma) = q_2 &\Leftrightarrow (\delta(q_0, w) = q_1 \wedge \sigma = 1) \vee (\delta(q_0, w) = q_2 \wedge \sigma \in \{0,1\}) \\
&\Leftrightarrow (w = 1^i 0^j, i \geq 0, j \geq 1, \sigma = 1) \vee (w = u01v, u, v \in \{0,1\}^*, \sigma \in \{0,1\}) \\
&\Leftrightarrow w\sigma = u01v, u, v \in \{0,1\}^*
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\forall w \in \Sigma^* : \\
w \in T(M) &\Leftrightarrow \delta(q_0, w) \in F \\
&\Leftrightarrow \delta(q_0, w) = q_2 \\
&\Leftrightarrow w = u01v, u, v \in \{0,1\}^* \quad \Box
\end{aligned}$$

Aufgabe 6

Gegeben: $m \in \mathbb{N}, L_m \subseteq \{0,1\}^*, w = a_n \dots a_1 a_0 \in L_m \Leftrightarrow q(w) = \sum_{0 \leq i \leq n} a_i \cdot 2^i$ ist durch m teilbar.

a)

Es soll ein DFA für L_m mit höchstens m Zuständen konstruiert werden.

Idee: Speichere in den Zuständen die Restklasse modulo m der durch das gelesene Wort repräsentierten Zahl, denn falls $\varphi(x) \bmod m = r$, dann ist $\varphi(x0) \bmod m = 2r \bmod m$ und $\varphi(x1) \bmod m = 2r + 1 \bmod m$. φ ist die mit dem Wert assoziierte Zahl.

Man definiere den DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit

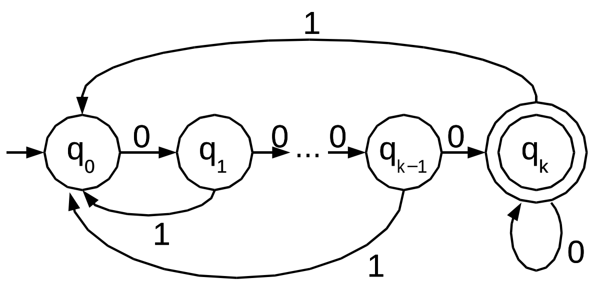
$$\begin{aligned} Q &= \{q_i | 0 \leq i \leq m-1\} \\ \delta(q_i, 0) &= q_{(2i) \bmod m} \forall q_i \in Q \\ \delta(q_i, 1) &= q_{(2i+1) \bmod m} \forall q_i \in Q \end{aligned}$$

Durch Induktion läßt sich zeigen: $\forall w \in \Sigma^* : \delta(q_0, w) = q_{\varphi(w)} \bmod r$.

$$\begin{aligned} \forall w \in \Sigma^* : w \in T(M) &\Leftrightarrow \delta(q_0, w) \in F \\ &\Leftrightarrow \delta(q_0, w) = q_0 \\ &\Leftrightarrow \delta(w) \bmod r = 0 \quad \square \end{aligned}$$

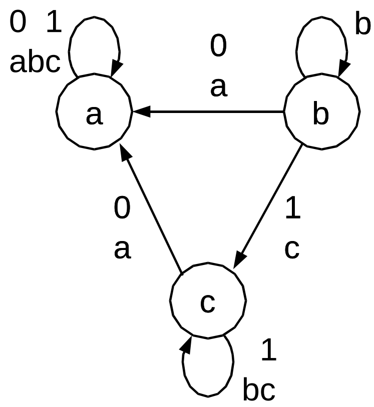
b)

Es soll ein DFA mit $k + 1$ Zuständen konstruiert werden, der L_m mit $m = 2^k$ versteht. Wie man zeigen kann, ist für alle $w \in \Sigma^*$ $\varphi(w)$ genau dann durch $m = 2^k$ teilbar, wenn die letzten k Stellen von w 0 sind, $w = x0^k$ oder $w_0 = 0^l, l \geq 0 \rightarrow$ Konstruktion eines DFA für $L_m = \{x0^k | x \in \Sigma\} \cup \{0^l | l \geq 0\}$.



Aufgabe 7

$h(0) = a, h(1) = c$. Der Monoid $\langle M, \circ \rangle$ läßt sich durch folgendes Diagramm darstellen:



Idee: $h^{-1}(a) = \{u0v | uv \in \{0,1\}^*\}, h^{-1}(c) = \{1^i | i \geq 1\}$.

Wir zeigen: $\forall w \in \Sigma^+ : h(w) = c \Leftrightarrow w = 1^k$ für ein $k \geq 1$.

„$\Rightarrow$“: Induktion über k

Verankerung: $k = 1 : h(1) = c \quad \surd$

Schluß: $n \to n+1 : h(1^{n+1}) = h(1^n) \circ h(1) = c \circ c = c \quad \surd$

„$\Leftarrow$“: Induktion über $|w|$

Verankerung: $|w| = 1 \Rightarrow h(0) = a, h(1) = c \quad \surd$

Schluß: $|w| = n+1 \Rightarrow w = x\sigma, |w| = n, \sigma \in \Sigma.\ h(x\sigma) = h(x) \circ h(\sigma)$

Fallunterscheidung:

- $\sigma = 0 : h(x) \circ h(0) = h(x) \circ a = a \forall h(x) \in M$, also $h(x\sigma) \neq c$
- $\sigma = 1$:

  $h(x) \circ h(1) = h(x) \circ c$
  $h(x) = a \Rightarrow h(x) \circ c = a \circ c = a$
  $h(x) = b \Rightarrow h(x) \circ c = b \circ c = c$
  $h(x) = c \Rightarrow h(x) \circ c = c \circ c = c$
  $h(x) = b$ kommt nicht vor für $x \neq \varepsilon$

Für $h(x) = c$ gilt nach Induktionsvoraussetzung $x = 1^n$, also $x\sigma = 1^{n+1} \quad \square$

Für alle $w \in \Sigma^+$ gilt $h(w) = a \vee h(w) = c$. Also ist $h^{-1}(a) = \Sigma^+ - h^{-1}(c) = \{u0v | u, v \in \Sigma^*\} \quad \square$

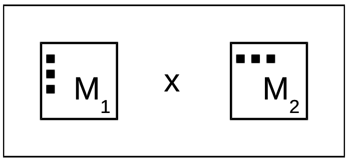
Aufgabe 8

Gegeben: Zwei DFA $M_i = (Q_i, \Sigma_i, \delta_i, q_0^i, F_i), i = 1, 2$.

a)

Es soll ein DFA M' mit $T(M') = T(M_1) \cup T(M_2)$ ohne Verwendung der Potenzmengenkonstruktion konstruiert werden.

Idee: Verwendung des Kreuzproduktes.



$$\begin{array}{cc} M_1 & M_2 \\ \downarrow & \downarrow \\ [q_0^1 & q_0^2] \\ \downarrow & \downarrow \\ [q_1 & p_1] \end{array}$$

Kreuzprodukt

Man definiert also den DFA $M' = (Q, \Sigma, \delta, [q_0^1, q_0^2], F)$ mit $Q_1 \times Q_2 = Q = \{[p,q] | p \in Q_1, q \in Q_2\}$. $\delta([p,q],\sigma) = [\delta_1(p,\sigma), \delta_2(q,\sigma)]$ für alle $[p,q] \in Q, \sigma \in \Sigma$. $F = \{[p,q] | p \in F_1 \vee q \in F_2\} \rightarrow$ „$F_1 \times Q_2 \times Q_1 \times F_2$“

Zu zeigen: $T(M') = T(M_1) \cup T(M_2)$.

Durch Induktion nach der Länge von w zeigt man: $\forall [p,q] \in Q, w \in \Sigma^* : \delta([p,q],w) = [\delta_1(p,w), \delta_2(q,w)]$.

Induktionsverankerung: $|w| = 0 \Rightarrow w = \varepsilon$. $\delta([p,q],\varepsilon) = [p,q] = [\delta_1(p,\varepsilon), \delta_2(p,\varepsilon)]$ $\surd$

Induktionsschluß: Sei die Behauptung für n bewiesen und $|w| = n+1$. Dann gilt $w = x\sigma, \sigma \in \Sigma$. Es ist

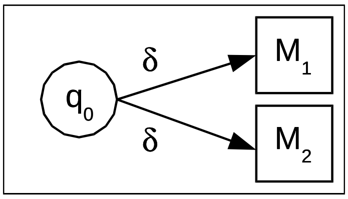
$$\begin{aligned} \delta([p,q],w) &= \delta([p,q],x\sigma) \\ &= \delta(\delta([p,q],x),\sigma) \\ &= \delta([\delta_1(p,x),\delta_2(q,x)],\sigma) \\ &= [\delta_1(\delta_1(p,x),\sigma), \delta_2(\delta_2(q,x),\sigma)] \\ &= [\delta_1(p,x\sigma), \delta_2(q,x\sigma)] \quad \Box \end{aligned}$$

Wie folgt daraus $T(M') = T(M_1) \cup T(M_2)$?

$$\begin{aligned} w \in T(M') &\overset{\text{def } T(M)}{\Leftrightarrow} \delta([q_0^1, q_0^2], w) \in F \\ &\Leftrightarrow [\delta_1(q_0^1, w), \delta_2(q_0^2, w)] \in F \\ &\Leftrightarrow \delta_1(q_0^1, w) \in F_1 \vee \delta_2(q_0^2, w) \in F_2 \\ &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \end{aligned}$$

b)

Konstruktion aus 8a) hat $|Q_1| \cdot |Q_2|$ Zustände — zu groß! **Idee:** Zu Beginn „erraten“, ob $w \in T(M_1)$ oder $w \in T(M_2)$:



Formal: $M'' = (Q'', \Sigma, \delta'', q_0'', F'')$ mit $Q'' = \{q_0''\} \cup Q_1 \cup Q_2$; o.B.d.A. $q_0'' \notin Q_1 \cup Q_2$, $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$.

$$\begin{aligned} \delta''(q_0'', \sigma) &= \{\delta_1(q_0^1, \sigma), \delta_2(q_0^2, \sigma)\} \forall \sigma \in \Sigma \\ \delta''(q, \sigma) &= \{\delta_1(q, \sigma)\} \forall q \in Q_1, \sigma \in \Sigma \\ \delta''(q, \sigma) &= \{\delta_2(q, \sigma)\} \forall q \in Q_2, \sigma \in \Sigma \\ F'' &= \{q \in Q'' | q \in F_1 \cup F_2\} \cup \{q_0'' | q_0^1 \in F_1 \vee q_0^2 \in F_2\} \end{aligned}$$

Durch Induktion nach der Länge von $w : \forall w \in \Sigma^* : \delta''(q_0'', w) = \{\delta_1(q_0^1, w), \delta_2(q_0^2, w)\}$

$$\begin{aligned} \forall w \in \Sigma^* : w \in T(M'') &\Leftrightarrow \delta''(q_0'', w) \cap F \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \{\delta_1(q_0^1, w), \delta_2(q_0^2, w)\} \cap \{F_1 \cup F_2\} \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \{\delta_1(q_0^1, w)\} \cap F_1 \neq \emptyset \vee \{\delta_2(q_0^2, w)\} \cap F_2 \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow w \in T(M_1) \vee w \in T(M_2) \\ &\Leftrightarrow w \in T(M_1) \cup T(M_2) \\ &\Leftrightarrow T(M'') = T(M_1) \cup T(M_2) \quad \square \end{aligned}$$

Außerdem: $\varepsilon \in T(M'') \Leftrightarrow \varepsilon \in T(M_1) \cup T(M_2)$