Aufgabe 1

Aufgabe: Konstruiere formal einen DFA aus gegebenem NFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

Lösung: Der DFA wird durch Potenzmengenkonstruktion konstruiert. Sei $P(Q)$ die *Potenzmenge* von Q mit $P(Q) = 2^Q$. Konstruiert wird ein DFA M' mit $M' = (Q', \Sigma, \delta', \{q_0\}, F')$ mit

- $Q' = P(Q)$,
- $\delta' : Q' \times \Sigma \to Q'$, $\delta'(A, \sigma) = \bigcup_{q \in A} \delta(q, \sigma), \sigma \in \Sigma, A \in Q'$.
- $F' = \{A | A \subseteq Q' \wedge A \cap F \neq \emptyset\}$

Aufgabe 3

Aufgabe: Beweise mit Hilfe des Satzes von Nerode: Die Sprache $L \stackrel{\text{def}}{=} \{a^n c b^n | n \geq 0\}$ ist keine reguläre Sprache.

Lösung: Myhill-Nerode besagt u.a., daß eine Sprache L genau dann regulär ist, wenn der Index der Nerode-Relation R_L endlich ist, wobei R_L wie folgt definiert ist:

$$x \; R_L \; y \Leftrightarrow \forall z \in \Sigma^* : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$$

Behauptung: $L \stackrel{\text{def}}{=} \{a^n c b^n | n \geq 0\} \notin REG$.

Beweis [durch Widerspruch]: Angenommen, $L \in REG$. Dann ist der Index der Nerode-Relation endlich. Sei $k = index(R_L)$.

Behauptung: $a^l \; R_L \; a^m$ für $0 \leq l, m \leq k, l \neq m$.

Angenommen, $a^l \; R_L \; a^m$. Dann gilt für alle $z \in \{a, b, c\}^* : xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$. Insbesondere für $z := cb^l$ gilt: $a^l c b^l \in L \Leftrightarrow a^m c b^l \in L$ ↯

Also: $[a^l]_{R_L} \neq [a^m]_{R_L}$ für $0 \leq l, m \leq k$ und $l \neq m$, d.h. R_L besitzt mindestens $k+1$ verschiedene Äquivalenzklassen $\Rightarrow index(R_L) > k$ ↯

Daraus folgt: L ist nicht regulär. □

Aufgabe 5

Aufgabe: Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA. Zeige: M ist minimal $\Leftrightarrow$ jeder Zustand ist erreichbar, und M ist reduziert, also $\forall [A], [B] \in Q, [A] \neq [B]$ gibt es ein $w \in \Sigma^*$ mit $(\delta([A], w) \in F \wedge \delta([B], w) \notin F) \vee (\delta([A], w) \notin F \wedge \delta([B], w) \in F)$.

Beweis:

„$\Rightarrow$": M ist minimal; dann ist jeder Zustand erreichbar, denn wenn es nicht erreichbare Zustände gäbe, könnten diese gestrichen werden, und der Automat wäre nicht minimal ✓

Da M minimal ist, existiert ein Isomorphismus zum Nerode-Automaten. $M_N = (Q_N, \Sigma, \delta_N, q_{0_N}, F_N)$. Der Isomorphismus sei $h : Q \to Q_N$, wobei gilt $h(q) = [x]_{R_L} \Leftrightarrow \exists x \in \Sigma^* : \delta(q_0, x) = q$.

$L := T(M)$. Da M keine nicht erreichbaren Zustände hat, gibt es $x_1, x_2 \in \Sigma^*$ mit $\delta(q_0, x_1) = q_1$ und $\delta(q_0, x_2) = q_2$.

Annahme: M ist nicht reduziert. Dann gibt es $q_1, q_2 \in Q$ mit $q_1 \neq q_2$ und für alle $w \in \Sigma^*$ gilt: $(\delta(q_1, w) \in F \wedge \delta(q_2, w) \in F)$.

Also gilt für alle $w \in \Sigma^*$:

$$\begin{aligned} x_1 w \in L &\Leftrightarrow \delta(q_0, x_1 w) \in F \\ &\Leftrightarrow \delta(q_1, w) \in F \\ &\Leftrightarrow \delta(q_2, w) \in F \\ &\Leftrightarrow \delta(q_0, x_2 w) \in F \\ &\Leftrightarrow x_2 w \in L \end{aligned}$$

Also gilt: $x_1 \; R_L \; x_2 \Rightarrow [x_1] = [x_2] = h(q_1) = h(q_2) \Rightarrow q_1 = q_2$, da h bijektiv $\lightning$

Also muß M bereits reduziert gewesen sein. $\square$

„$\Leftarrow$": Angenommen, M ist nicht minimal. Dann könnten nicht erreichbare Zustände existieren, Widerspruch zur Vorraussetzung. ✓

Angenommen, M ist nicht minimal. Dann fallen bei der Abbildung $h : Q \to Q_N$ zwei Zustände $q_1, q_2 \in Q$ zusammen mit $q_1 \neq q_2$, also $h(q_1) = h(q_2)$, denn h ist eindeutig und total.

Da es keine nicht erreichbaren Zustände gibt, existieren $x_1, x_2 \in \Sigma^*$ mit $\delta(q_0, x_1) = q_1$ und $\delta(q_0, x_2) = q_2$. $L := T(M)$.

$$\begin{aligned} h(q_1) = h(q_2) &\Rightarrow [x_1]_{R_L} = [x_2]_{R_L} \\ &\Rightarrow x_1 \; R_L \; x_2 \\ &\Rightarrow \forall w \in \Sigma^* : x_1 w \in L \Leftrightarrow x_2 w \in L \end{aligned}$$

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1.

$$\begin{aligned} \delta(q_1, w) \in F &\Rightarrow \delta(q_0, x_1 w) \in F \\ &\Rightarrow x_1 w \in L \\ &\Rightarrow x_2 w \in L \\ &\Rightarrow \delta(q_0, x_2 w) \in F \\ &\Rightarrow \delta(q_2, w) \in F \; \lightning \text{ (zur Vorr.)} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\delta(q_1, w) \notin F &\Rightarrow \delta(q_0, x_1 w) \notin F \\
&\Rightarrow x_1 w \notin L \\
&\Rightarrow x_2 w \notin L \\
&\Rightarrow \delta(q_0, x_2 w) \notin F \\
&\Rightarrow \delta(q_2, w) \notin F \quad \lightning \text{ (zur Vorr.)}
\end{aligned}$$

In beiden Fällen ergab sich ein Widerspruch, also ist M bereits minimal. $\square$