Abschlußeigenschaften regulärer Sprachen

1. *Vereinigung:* $L_1, L_2 \in REG \overset{?}{\Rightarrow} L_1 \cup L_2 \in REG$
2. *Schnitt:* $L_1, L_2 \in REG \overset{?}{\Rightarrow} L_1 \cap L_2 \in REG$
3. *Komplement:* $L \subseteq \Sigma^*, L \in REG \overset{?}{\Rightarrow} \Sigma^* - L = \overline{L} \in REG$
4. *Konkatenation:* $L_1, L_2 \in REG \overset{?}{\Rightarrow} L_1 \cdot L_2 \in REG, L_1 \cdot L_2 \overset{\text{def}}{=} \{xy | x \in L_1, y \in L_2\}$
5. *Kleenesche Hülle:* $L \in REG \overset{?}{\Rightarrow} L^* \in REG, L^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} l^i, l^0 = \{\varepsilon\}$
6. *Inverser Homomorphismus:* $h : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*, L_2 \subseteq \Sigma_2^*, L_2 \in REG \overset{?}{\Rightarrow} h^{-1}(L_2) \in REG$,
   $h^{-1}(L_2) \overset{\text{def}}{=} \{x | x \in \Sigma_1^*, h(x) \in L_2\}$
7. *Homomorphismus:* $h : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*, L_1 \subseteq \Sigma_1^*, L_1 \in REG \overset{?}{\Rightarrow} h(L_1) \in REG$

Beweise:

Vereinigung, Konkatenation, Kleenesche Hülle:

Der Beweis folgt unmittelbar aus der Definition regulärer Ausdrücke.

Schnitt:

Es gilt $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$, wobei die Querstriche die Komplementbildung unter Berücksichtigung eines Alphabets bezeichnet, das die Alphabete von L_1 und L_2 einschließt. Die Abgeschlossenheit unter der Schnittbildung folgt dann aus der Abgeschlossenheit unter der Vereinigung und Komplementbildung.

Komplement:

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ und $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA, der L akzeptiert. Um nun $\Sigma^* - L$ zu akzeptieren, wird das Komplement der Endzustände gebildet, d.h. ein neuer DFA M' konstruiert mit $M' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q - F)$. Dieser Automat akzeptiert genau dann ein Wort w, wenn $\delta(q_0, w) \in \{Q - F\}$, also $w \in \Sigma^* - L$. Dieser Beweis gilt aber nur, wenn M ein **deterministischer** Automat ist und über keine ε-Bewegungen verfügt.

Homomorphismen

Ein Homomorphismus ist eine Substitution über den Eigenschaften Vereinigung, Hülle und Konkatenation. Da die Substitution von Vereinigung, Hülle und Konkatenation gleich der Vereinigung, Hülle und Konkatenation der Substitution ist, ist auch der Homomorphismus regulär.

Um die Abgeschlossenheit inverser Homomorphismen zu zeigen, sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA, der die Sprache L_2 akzeptiert, und h sei ein Homomorphismus $\Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$. Sei M' ein DFA, der $h^{-1}(L_2)$ akzeptiert, indem er ein Symbol x aus Σ_1^* liest und M auf $h(x)$ simuliert: $M' = (Q, \Sigma_1, \delta', q_0, F)$ und $\delta'(q, x), q \in Q, a \in \Sigma_1 = \delta(q, h(a))$. Durch Induktion nach $|x|$ läßt sich zeigen, daß $\delta'(q_0, x) = \delta(q_0, h(x))$. M' akzeptiert x also genau dann, wenn M $h(x)$ akzeptiert, also wenn $L(M') = h^{-1}(L(M))$.

Sinn von Abschlußeigenschaften

Mit Hilfe der Abschlußeigenschaften läßt sich zeigen, ob eine Sprache regulär ist. Beispiel: Es läßt sich zeigen:

$$L = \{a^n b^n | n \geq 0\} \notin REG$$

a) $L = a^n b^r c^n d^s | n \geq 0, r \geq 0, s \geq 0\}$ auch $\notin REG$?

Angenommen, $L \in REG$. Dann kann man einen Homomorphismus h definieren mit $h(a) = a, h(b) = \varepsilon, h(c) = b, h(d) = \varepsilon$. Nach Abschlußeigenschaft muß h auch regulär sein. Es gilt also $h(L) = \{a^n b^n | n \geq 0\} \in REG$ ↯, L ist also *nicht* regulär.

b) $L = \{w | w \in \{a, b\}^*, \#_a(w) = \#_b(w)\} \notin REG$.

Angenommen, $L \in REG$. Es sei $L_1 \stackrel{\text{def}}{=} L \cap a^* b^*$. Da $a^* b^*$ regulär ist, muß auch der Schnitt von L und $a^* b^*$ regulär sein. Es gilt allerdings $L_1 = \{a^n b^n | n \geq 0\} \in REG$ ↯

c) $L = \{a^n b^{k \cdot n} | n \geq 0\}, k \geq 1$ beliebig, aber dann fest.

Angenommen, $L \in REG$. Definiere Homomorphismus h mit $h(a) = a, h(b) = b^k$. Dann würde gelten $h^{-1}(L) = \{a^n b^n | n \geq 0\} \in REG$ ↯

d) $L = \{a^n b^m | 0 \leq m \leq n\} \notin REG$.

Angenommen, $L \in REG$. Man definiere

$$L_1 = \overline{L} \cap a^* b^* \in REG, \text{ also } L_1 = \{a^n b^m | 0 \leq n < m\}$$

Nach Definition eines Homomorphismus h mit $h(a) = a, h(b) = b, h(c) = b$ ergibt sich

$$L_2 = \{a^n x | \ |x| = m = \#_b(x) + \#_c(x)\}$$

Damit läßt sich nun L_3 definieren mit

$$L_3 = L_2 \cap a^* b^* c \in REG, \text{ also } L_3 = \{a^n b^m c | 0 \leq \underbrace{n < m + 1}_{n \leq m}\}$$

Ein weiterer Homomorphismus g sei $g(a) = a, g(b) = b, g(c) = \varepsilon$. Damit ist

$$L_4 = g(L_3) \in REG, L_4 = \{a^n b^m | 0 \leq n \leq m\}$$

Daraus erhält man schließlich

$$L_5 = L \cap L_4 \in REG \text{ mit } L_5 = \{a^n b^n | n \geq 0\} \in REG \ \lightning$$

e) Sei $\Sigma \stackrel{\text{def}}{=} \{a, b_1, \ldots, b_n\}$. Sei

$$L \stackrel{\text{def}}{=} \{a^n b_1^{i_1} b_2^{i_2} \ldots b_n^{i_n} | 0 \leq i_1 + \ldots + i_n \leq n$$

Angenommen, $L \in REG$. Dann sei Homomorphismus h definiert mit $h(a) = a, h(b_j) = b, 1 \leq j \leq n$. $h(L) \in REG \Rightarrow h(L) = \{a^n b^m | 0 \leq m \leq n\} \in REG\ \lightning$, da durch d) widerlegt.

f) $L \stackrel{\text{def}}{=} \{a^n b^m | n \neq m\} \in REG$? Sei $L_1 \stackrel{\text{def}}{=} \overline{L} \cap a^* b^* = \{a^n b^n | n \geq 0\} \in REG\ \lightning$

g) $(a^n c b^n | n \geq 0) \in REG$? Sei $L = (a^n b^n | n \geq 0)$, Homomorphismus $h : h(a) = a, h(b) = b, h(c) = \varepsilon$. $L_1 = h^{-1}(L) \in REG$. $L_1 \cap a^* c b^* \in REG \Rightarrow \{a^n c b^n | n \geq 0\} \in REG\ \lightning$