Theoretische Informatik

Frank Bergmann

1. Juli 2000

Inhaltsverzeichnis

1 Übungsblatt 5

1.1 Aufgabe 16

1.1.1 Aufgabenstellung

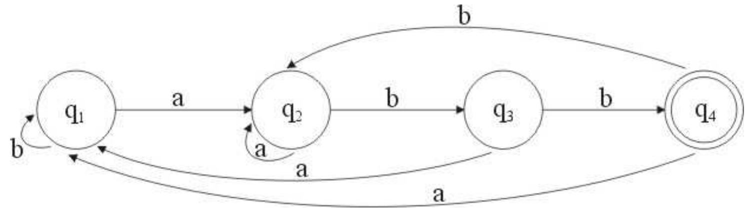
Konstruieren Sie mit Hilfe des aus der Vorlesung bekannten Verfahrens aus dem folgendem DFA $M = (\{q_0, \ldots, q_3\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_3\})$ mit:

$$\begin{array}{ll}
\delta(q_0, a) \stackrel{def}{=} q_1 & \delta(q_0, b) \stackrel{def}{=} q_0 \\
\delta(q_1, a) \stackrel{def}{=} q_1 & \delta(q_1, b) \stackrel{def}{=} q_2 \\
\delta(q_2, a) \stackrel{def}{=} q_0 & \delta(q_2, b) \stackrel{def}{=} q_3 \\
\delta(q_3, a) \stackrel{def}{=} q_0 & \delta(q_3, b) \stackrel{def}{=} q_1
\end{array}$$

einen äquivalenten regulären Ausdruck. Dokumentieren Sie alle Zwischenschritte.

1.1.2 Lösung

Hier erst einmal ein Bild des oben definierten Automaten:



Um diesen Automaten umzuwandeln sind folgende zwei Regeln wiederholt anzuwenden:

$$R_{ij}^{k} = R_{ik}^{k-1}\left(R_{kk}^{k-1}\right)^{*}R_{kj}^{k-1} \cup R_{ij}^{k-1}$$
$$R_{ij}^{0} = \begin{cases} \{a \mid \delta(q_i,a)=q_j\} \text{ falls } i\neq j \\ \{a \mid \delta(q_i,a)=q_j\} \cup \{\epsilon\} \text{ falls } i=j \end{cases}$$

Diese rekursiven Regeln sind nun für k durchzuführen: Zunächst für $k = 0, k = 1$:

	$k=0$	$k=1$
r_{11}^{k}	$\epsilon + b$	$(\epsilon+b)(\epsilon+b)(\epsilon+b) \cup (\epsilon+b) = b^*$
r_{12}^{k}	a	$(\epsilon+b)(\epsilon+b)\,a \cup a = b^*a$
r_{13}^{k}	$\emptyset$	$(\epsilon+b)(\epsilon+b)\,\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$
r_{14}^{k}	$\emptyset$	$(\epsilon+b)(\epsilon+b)\,\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$
r_{21}^{k}	$\emptyset$	$\emptyset\,(\epsilon+b)(\epsilon+b) \cup \emptyset = \emptyset$
r_{22}^{k}	$\epsilon + a$	$\emptyset\,(\epsilon+b)\,a \cup (\epsilon+a) = (\epsilon+a)$
r_{23}^{k}	b	$\emptyset\,(\epsilon+b)\,\emptyset \cup b = b$
r_{24}^{k}	$\emptyset$	$\emptyset\,(\epsilon+b)\,\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$
r_{31}^{k}	a	$a\,(\epsilon+b)(\epsilon+b) \cup a = ab^*$
r_{32}^{k}	$\emptyset$	$a\,(\epsilon+b)\,a \cup \emptyset = ab^*a$
r_{33}^{k}	ϵ	$a\,(\epsilon+b)\,\emptyset \cup \epsilon = \epsilon$
r_{34}^{k}	b	$a\,(\epsilon+b)\,\emptyset \cup b = b$
r_{41}^{k}	a	$a\,(\epsilon+b)(\epsilon+b) \cup a = ab^*$
r_{42}^{k}	b	$a\,(\epsilon+b)\,a \cup b = ab^*a + b$
r_{43}^{k}	$\emptyset$	$a\,(\epsilon+b)\,\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$
r_{44}^{k}	ϵ	$a\,(\epsilon+b)\,\emptyset \cup \epsilon = \epsilon$

Und nun das selbe noch für $k = 2$ und $k = 3$:

	$k=2$	$k=3$
r_{11}^k	$(b^*a)\ (\epsilon+a)\ \emptyset \cup b^* = b^*$	
r_{12}^k	$(b^*a)(\epsilon+a)\ (\epsilon+a)\cup b^*a = b^*a^+$	
r_{13}^k	$(b^*a)(\epsilon+a)\ b\cup\emptyset = b^*a^+b$	
r_{14}^k	$(b^*a)(\epsilon+a)\ \emptyset\cup\emptyset = \emptyset$	
r_{21}^k	$(\epsilon+a)\ (\epsilon+a)\ \emptyset\cup\emptyset = \emptyset$	
r_{22}^k	$(\epsilon+a)\ (\epsilon+a)\ (\epsilon+a)\cup(\epsilon+a) = a^*$	
r_{23}^k	$(\epsilon+a)\ (\epsilon+a)\ b\cup b = a^*b$	
r_{24}^k	$(\epsilon+a)\ (\epsilon+a)\ \emptyset\cup\emptyset = \emptyset$	
r_{31}^k	$(ab^*a)(\epsilon+a)\ \emptyset\cup ab^* = ab^*$	
r_{32}^k	$(ab^*a)(\epsilon+a)\ (\epsilon+a)\cup ab^*a = ab^*a^+$	
r_{33}^k	$(ab^*a)(\epsilon+a)\ b\cup\epsilon = ab^*a^+b$	
r_{34}^k	$(ab^*a)(\epsilon+a)\ \emptyset\cup b = b$	
r_{41}^k	$(ab^*a+b)(\epsilon+a)\ \emptyset\cup ab^* = ab^*$	
r_{42}^k	$(ab^*a+b)(\epsilon+a)\ (\epsilon+a)\cup ab^*a+b = ab^*a^+ + ba^+$	
r_{43}^k	$(ab^*a+b)(\epsilon+a)\ b\cup\emptyset = ab^*a^+b + ba^*b$	
r_{44}^k	$(ab^*a+b)(\epsilon+a)\ \emptyset\cup\epsilon = \epsilon$	

Zu berechnen ist nun der akzeptierende Ausdruck:

$$r_{14}^3 = r_{13}^2 \left(r_{33}^2\right)^* r_{34}^2 + r_{14}^2$$

Damit erspare ich mir mal die Spalte $k=3$, denn es gilt:

$$r_{14}^3 = b^*a^+b \left(ab^*a^+b\right)^* b + \emptyset$$

Und damit hätten wir einen regulären Ausdruck gefunden, welcher den Automaten beschreibt.

1.2 Aufgabe 17

1.2.1 Aufgabenstellung

Sei $R \subseteq \Sigma^*$ eine reguläre Sprache. Zeigen Sie, dass die Sprache

$$MT(R) \overset{def}{=} \{y \mid \exists x, z \in \Sigma^* \colon (|x| = |y| = |z| \wedge xyz \in R)\}$$

ebenfalls regulär ist.

1.2.2 Lösung

Wenn die Sorache R regulär ist, dann existiert ein DFA M mit $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ für welchen gilt: $T(M) = R$. Die Idee, um zum *mittleren Drittel (MT)* zu gelangen ist, ein Zeichen zu lesen und dann die anderen beiden Werte von dort aus zu ermitteln. Wir definieren nun einen MNFA $M' = (Q', \Sigma, \delta', Q_0, F')$ mit:

$$\begin{aligned}
Q' &= Q \times Q \times Q \times Q \times Q \\
Q_0 &= \{[q_0, p, p, q, q] \mid p, q \in Q\} \\
F' &= \{[p', p', q', q', f] \mid p', q' \in Q, f \in F\} \\
\delta'([q_1, q_2, q_3, q_4, q_5], a) &= \{[\delta(q_1, \sigma), q_2, \delta(q_3, a), q_4, \delta(q_5, \tau)] \mid \sigma, \tau \in \Sigma\}\ \forall a \in \Sigma
\end{aligned}$$

δ' sei wie üblich auf Worte $w \in \Sigma^*$ erweitert. (Die Zustände q_2 und q_4 dienen zum Speichern der Startpositionen.)

Behauptung:

$$[p_1, p_2, p_3, p_4, p_5] \in \delta'([q_1, q_2, q_3, q_4, q_5], w) \iff \begin{array}{l} (\exists x \in \Sigma^*\colon |x| = |w| \wedge \delta(q_1, x) = p_1) \wedge \\ (q_2 = p_2) \wedge \\ (\delta(q_3, w) = p_3) \wedge \\ (q_4 = p_4) \wedge \\ (\exists z \in \Sigma^*\colon |z| = |w| \wedge \delta(q_5, z) = p_5) \end{array}$$

Der Beweis der Behauptung erfolgt durch Induktion über alle Worte w.

Für Wörter der Länge 0 und 1 ist die Behauptung klar, nach der Definition. Es gibt nur die Worte:

$$\begin{array}{lcl} |w| = 0 & \Rightarrow & w = \epsilon \\ |w| = 1 & \Rightarrow & w \in \Sigma \end{array}$$

Gelte nun die Behauptung für alle Wort der Wortlänge $|w| \leq n$. Nun folgt der Schritt auf $|w| = n + 1$. Dazu betrachten wir ein Wort $w = w_1, \ldots, w_n, w_{n+1}$. Für diese gilt:

$$[p_1, p_2, p_3, p_4, p_5] \in \delta'([q_1, q_2, q_3, q_4, q_5], w) \iff \begin{array}{l} (\exists x \in \Sigma^*\colon |x| = |w| \wedge \delta(q_1, x) = p_1) \wedge \\ (q_2 = p_2) \wedge \\ (\delta(q_3, w) = p_3) \wedge \\ (q_4 = p_4) \wedge \\ (\exists z \in \Sigma^*\colon |z| = |w| \wedge \delta(q_5, z) = p_5) \end{array}$$

damit ist:

$$\delta'([q_1, \ldots, q_5], w_1 \ldots w_{n+1}) = \bigcup_{[s_1, \ldots, s_5] \in \delta'([q_1, \ldots, q_5], w_1 \ldots w_n)} \delta'([s_1, \ldots, s_5], w_{n+1})$$

$$= \bigcup_{\substack{[s_1,\ldots,s_5] \text{ mit } (\exists x \in \Sigma^* : \delta(q_1, x) = s_1) \wedge \\ (s_2 = q_2) \wedge \\ (\delta(q_3, w_1 \ldots w_n) = s_3) \wedge \\ (s_4 = q_4) \wedge \\ (\exists z \in \Sigma^* : \delta(q_5, z) = s_5) \wedge \\ (|x| = |z| = n)}} \{[\delta(s_1, \sigma), s_2, \delta(s_3, w_{n+1}), s_4, \delta(s_5, \tau)] \mid \sigma, \tau \in \Sigma\}$$

Durch einsetzen erhält man dann:

$$= \{[\delta(\delta(q_1, x), \sigma), q_2, \delta(\delta(q_3, w_1 \ldots w_n), w_{n+1}), s_4, \delta(\delta(q_5, z), \tau)] \mid \sigma, \tau \in \Sigma \wedge \exists x, z \in \Sigma^*\colon |x| = |y| = n\}$$

$$= \{[\delta(q_1, x'), q_2, \delta(q_3, w), q_4, \delta(q_5, z')] \mid \exists x', z' \in \Sigma^*\colon |x| = |y| = n\}$$

$$\Rightarrow [p_1, \ldots, p_5] \in \delta'([q_1, \ldots, q_5], w_1 \ldots w_{n+1}) \iff \begin{array}{l} (\exists x \in \Sigma^*\colon |x| = n + 1 \wedge \delta(q_1, x) = p_1) \wedge \\ (q_2 = p_2) \wedge \\ (\delta(q_3, w_1 \ldots w_{n+1}) = p_3) \wedge \\ (q_4 = p_4) \wedge \\ (\exists z \in \Sigma^*\colon |z| = n + 1 \wedge \delta(q_5, \epsilon) = p_5) \end{array}$$

Somit ist die Behauptung bewiesen. Bleibt nur noch zu zeigen, dass für Wörter $w \in T(M')$ auch gilt $w \in MT(R)$.

$$w \in T(M') \iff \delta'(q_0, y) \cap F' \neq \emptyset \Rightarrow \exists p, y, p', y' \in Q, f \in F$$

mit:

$$\begin{aligned}
[p, q, w, q, f] \in \delta'([q_0, p', p', q', q'], w) \quad \iff \quad & (\exists x \in \Sigma^*\colon |x| = |w| \wedge \delta(q_0, x) = p) \wedge \\
& (p' = p) \wedge \\
& (\delta(q', w) = q) \wedge \\
& (q' = q) \wedge \\
& (\exists x, y \in \Sigma^*, p, q \in Q, f \in F\colon (\delta(q_0, xyz) = \delta(\delta(q_0, x), yz)))
\end{aligned}$$

weiterhin ist:

$$\begin{aligned}
\delta(p, yz) \quad &= \quad \delta(\delta(p, y), z) = \delta(q, z) = f \wedge (|x| = |y| = |z|) \\
&\iff \quad \exists x, y \in \Sigma^*\colon |x| = |y| = |z| \wedge xyz \in R \iff w \in MT(R)
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass $MT(R)$ regulär ist.

1.3 Aufgabe 18

1.3.1 Aufgabenstellung

Seien r, s und t reguläre Ausdrücke. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. $r(s+t) = rs + rt$
2. $s(rs+s)^* r = rr^* s(rr^* s)^*$
3. $(r+s)^* = r^* + s^*$
4. $(r+s)t = rt + st$
5. $(rs+r)^* r = r(sr+r)^*$
6. $(rs)t = r(st)$

1.3.2 Lösung

Zunächst sollen folgende Definitionen gegeben werden, die das Lösen der Aufgaben um einiges erleichtern:

$$\begin{aligned}
r^* \quad &= \quad \bigcup_{i \geq 0}^{\infty} r^i \\
w \in r + s \quad &\iff \quad w \in r \vee w \in s \\
w \in r \cdot s \quad &\iff \quad \exists x, y\colon (x \in r \wedge y \in s \wedge w = xy)
\end{aligned}$$

Damit ist es nun möglich die Ausdrücke zu überprüfen.

1. $r\,(s+t) = rs + rt$
   Betrachten wir nun ein Wort $w \in r \cdot (s+t)$.
   Mit der Definition von $\cdot$ folgt:

   $$\exists x, y\colon (y \in (s+t) \wedge x \in r \wedge w = xy)$$

   Aus der Definition von $+$ kann man folgern:

   $$\exists x, y\colon ((y \in s \vee y \in t) \wedge (x \in r \wedge w = xy))$$

   Mittels Definition der Distributivität folgt dann:

   $$\exists x, y\,(((y \in s) \wedge (x \in r \wedge w = xy)) \vee ((y \in t) \wedge (x \in r \wedge w = xy)))$$

   Nutzt man nun nochmal die Definition von $\cdot$ aus, so erhält man:

   $$\exists x, y\,((w = xy \in rs) \vee (w = xy \in rt))$$

   Mit der Definition von $+$ schließlich, kommt man zu:

   $$w \in rs + rt$$

   Und das war zu zeigen.

2. Die Aussage $s\,(rs+s)^{*}\,r = rr^{*}s\,(rr^{*}s)^{*}$ ist falsch. Um dies zu zeigen genügt ein Gegenbeispiel:
   Dazu wählt man $r = 0, s = 1$. Dann gilt:

   $$10 \in 1\,(01+1)^{*}\,0 = s\,(rs+s)^{*}\,r$$

   und

   $$10 \notin 00^{*}1\,(00^{*}1)^{*} = rr^{*}s\,(rr^{*}s)^{*}$$

   damit ist die Aussage falsch.

3. Auch diese Aussage $((r+s)^{*} = r^{*} + s^{*}\ )$ ist falsch. Für $r = 0,\ s = 1$ gilt:

   $$1010 \in (0+1)^{*} = (r+s)^{*}$$

   und

   $$1010 \notin (0^{*} + 1^{*}) = r^{*} + s^{*}$$

   somit ist auch diese Aussage widerlegt.

4. Die Aussage $(r+s)\,t = rt{+}st$ scheint zu gelten. Für ein Wort $w \in (r+s)\,t$ gilt nach der Definition von $\cdot$:

   $$\exists x, y\colon (x \in (r+s) \wedge y \in t \wedge w = xy)$$

   Mit der Definition von $+$ erhält man daraus:

   $$\exists x, y\colon ((x \in r \vee x \in s) \wedge (y \in t \wedge w = xy))$$

   Nun erhäkt man nach dem Distributivgesetz:

   $$\exists x, y\colon (((x \in r) \wedge (y \in t \wedge x = xy)) \vee ((x \in s) \wedge (y \in t \wedge x = xy)))$$

Mittels der Definition von $\cdot$ überführt man dies in:

$$\exists x, y\colon ((w = xy \in rt) \vee (w = xy \in st))$$

und damit ergibt die Definition von $+$:

$$w \in rt + st$$

Damit ist die Aussage bewiesen.

5. Auch die Aussage $(rs + r)^* \, r = r\,(sr + r)^*$ ist war. Wir betrachten ein Wort $w \in (rs + r)^* \, r$. Nach der Definition von $*$ gilt:

$$\bigcup_{i \geq 0}^{\infty} (rs + r)^i \, r$$

Dies entspricht der Vereinigung von i-Faktoren $(r\,(s + \epsilon)\,r)$. Durch Vergleichen mit Aufgabenteil 6 und 4 gelangt man so schnell zu:

$$\bigcup_{i \geq 0}^{\infty} r\,(sr + r)^i$$

und somit gilt:

$$w \in r\,(sr + r)^* \,.$$

6. Schließlich bleibt die Aussage $(rs)\,t = r\,(st)$ zu überprüfen. Diese ist wahr, wie der kurze folgende Beweis zeigen wird. Wir betrachten dazu ein Wort $w \in (rs)\,t$ Mit der Definition von $\cdot$ gelangt man schnell zu:

$$\exists x, y, z\colon ((xy \in rs) \wedge x \in t \wedge w = xyz)$$

Nochmaliges Anwenden führt dann zu:

$$\exists x, y, z\colon ((x \in r \wedge y \in s) \wedge x \in t \wedge w = xyz)$$

Durch die Assoziativität folgt:

$$\exists x, y, z\colon (x \in r \wedge (y \in s \wedge z \in t) \wedge w = xyz)$$

Nun verwendet man wieder die Definition von $\cdot$ und gelangt zunächst zu:

$$\exists x, y, z\colon (x \in r \wedge (yz \in st) \wedge w = xyz)$$

und schließlich zu:

$$w \in r\,(st)$$

womit die Aussage bewiesen wäre.

1.4 Aufgabe 19

1.4.1 Aufgabenstellung

Beweisen oder widerlegen Sie:

1. Sie $L_1 \subseteq \Sigma^*$ eine reguläre Sprache und $L_2 \subseteq \Sigma^*$ eine beliebige Sprache. Dann ist die Sprache
$$L_1/L_2 \stackrel{def}{=} \{x \mid \exists y \in L_2 \colon xy \in L_1\}$$
regulär.

2. Reguläre Sprachen sind abgeschlossen unter abzählbar unendlicher Vereinigung.

1.4.2 Lösung

1. Die Aussage ist wahr. Es sei $L_1 \subseteq \Sigma^* \in REG$ und $L_2 \subseteq \Sigma^*$ beliebig. Dann ist
$$L_1/L_2 = \{x \mid \exists y \in L_2 \colon xy \in L_1\} \in REG.$$
Hier nun der einfache Beweis: Da L_1 regulär ist, existiert ein DFA $M\left(Q, \Sigma, \delta, q_0, F\right)$ mit $T\left(M\right) = L_1$. Man definiert nun einen Automaten $M'\left(Q, \Sigma, \delta, q_0, F'\right)$ mit
$$F' = \{q \in Q \mid \exists y \in L_2 \colon \delta\left(q, y\right) \in F\}.$$
Dann gilt:
$$\begin{aligned} x \in T\left(M'\right) &\iff \delta\left(q_0, x\right) \in F' \iff \delta\left(q_0, x\right) = q \wedge q \in F' \\ &\iff \delta\left(q_0, x\right) = q \wedge \left(\exists y \in L_2 \colon \delta\left(q, y\right) \in F\right) \\ &\iff \exists y \in L_2 \colon \delta\left(q_0, xy\right) = \delta\left(q, y\right) \in F \\ &\iff \exists y \in L_2 \colon xy \in L_1 \\ &\iff x \in L_1/L_2 \end{aligned}$$
Also ist $T\left(M'\right) = L_1/L_2$ und damit ist L_1/L_2 regulär.

2. Reguläre Sprachen sind nicht abgeschlossen gegenüber abzählbarer unendlicher Vereinigung. Zum Beweis soll ein Gegenbeispiel genügen. Sei $L_n = \{a^n b^n\}$ definiert für $n \in N$. Jede Sprache ist endlich und somit regulär. Durch Vereinigung erhält man:
$$L = \bigcup_{n=0}^{\infty} L_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{a^n b^n\} = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$
diese ist jedoch nicht regulär.