Theoretische Informatik

Frank Bergmann

May 30, 2000

Contents

1 Übungsblatt 4 **1**
1.1 Aufgabe 12 1
1.1.1 Aufgabenstellung 1
1.1.2 Lösung 1
1.2 Aufgabe 13 2
1.2.1 Aufgabenstellung 2
1.2.2 Lösung 3
1.3 Aufgabe 14 4
1.3.1 Aufgabenstellung 4
1.3.2 Lösung 4
1.4 Aufgabe 15 6
1.4.1 Aufgabenstellung 6
1.4.2 Lösung 6

1 Übungsblatt 4

1.1 Aufgabe 12

1.1.1 Aufgabenstellung

Sei $R \subseteq \Sigma^*$ eine reguläre Sprache. Zeigen Sie, dass die Sprache:

$$FH\,(R) \stackrel{def}{=} \{x \mid \exists y \in \Sigma^* \colon (|x| = |y| \wedge xy \in R)\}$$

ebenfalls regulär ist.

1.1.2 Lösung

Angenommen wir haben einen DFA für R. Dieser muss existieren, da R regulär ist. Die Idee ist nun, mit einem Wort x in q_0 zu starten und gleichzeitig mit einem Wort y in f zu starten. Dies zeigt auch das Bild recht gut.

Da nun $R \subseteq \Sigma^*$ regulär ist, gibt es einen DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit $T(M) = R$. Dazu konstruiert man nun den NFA $M' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ mit:

$$\begin{array}{l}
Q' = \{[p,q] \mid p, q \in Q\} \cup \{q_0' \mid q_0' \in Q \times Q\} \\
\delta'([p,q], \sigma) = \{[\delta(p,\sigma), q'] \mid \exists f \in \Sigma \colon \delta(q', f) = q\} \\
\text{Für alle } [p,q] \in Q', \sigma \in \Sigma \text{ gilt :} \\
\delta'(q_0', \sigma) = \bigcup_{f \in F} \delta'([q_0, f], \sigma) \text{ für alle } \sigma \in \Sigma \\
F' = \{[p,q] \mid q \in Q\} \cup \{q_0' \mid q_0 \in F\}
\end{array}$$

Durch Induktion über die Wortlänge $|w|$ zeigt man, dass für alle $x \in \Sigma^*$ und $p, q \in Q$ gilt:

$$\delta'(q_0', x) = [p,q] \iff \delta(q_0, x) = p \wedge \exists y \in \Sigma^*, f \in F \colon (|y| = |x| \wedge \delta(q, y) = f)$$

Der Beweis ist nun schon so oft durchgeführt worden, dass an dieser Stelle darauf verzichtet werden soll.
Damit gilt für alle Wörter $x \in \Sigma^*$:

$$\begin{array}{lcl}
x \in T(M') & \iff & \delta'(q_0', x) \cap F \neq \emptyset \\
& \iff & \exists [p,q] \in F' \colon [p,q] \in \delta'(q_0', x) \\
& \iff & \exists [q,q] \in Q' \colon [q,q] \in \delta'(q_0', x) \\
& \iff & \exists [q,q] \in Q' \colon \delta(q_0, x) = q \wedge \exists y \in \Sigma^*, f \in F \colon (|x| = |y| \wedge \delta(q, y) = f) \\
& \iff & \exists y \in \Sigma^*, q \in Q \colon \delta(q_0, x) = q \wedge \delta(q, y) = y \wedge |y| = |x| \\
& \iff & \exists y \in \Sigma^* \colon |x| = |y| \wedge xy \in T(M) \\
& \iff & x \in FH(T(M))
\end{array}$$

Wegen $\epsilon \in T(M') \iff \epsilon \in T(M)$ gilt:

$$T(M') = FH(T(M))$$

1.2 Aufgabe 13

1.2.1 Aufgabenstellung

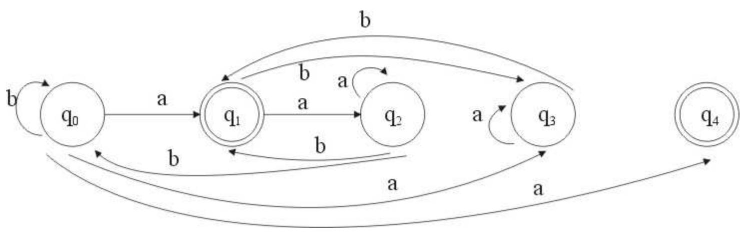
Gegeben sei der NFA $M = (\{q_0, \ldots, q_4\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_1, q_4\})$ mit der Übergangsfunktion:

$$\begin{array}{ll}
\delta(q_0, a) \stackrel{def}{=} \{q_1, q_3, q_4\} & \delta(q_0, b) \stackrel{def}{=} \{q_0\} \\
\delta(q_1, a) \stackrel{def}{=} \{q_2\} & \delta(q_1, b) \stackrel{def}{=} \{q_3\} \\
\delta(q_2, a) \stackrel{def}{=} \{q_2\} & \delta(q_2, b) \stackrel{def}{=} \{q_0, q_1\} \\
\delta(q_3, a) \stackrel{def}{=} \{q_3\} & \delta(q_3, b) \stackrel{def}{=} \{q_1\} \\
\delta(q_4, a) \stackrel{def}{=} \emptyset & \delta(q_4, b) \stackrel{def}{=} \emptyset
\end{array}$$

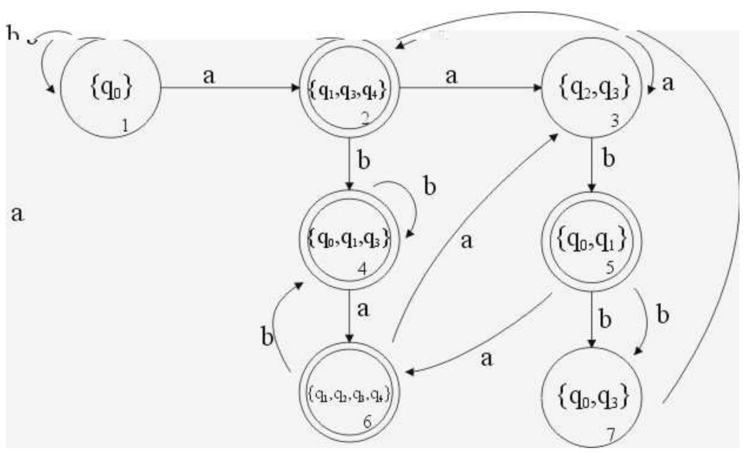
Konstruieren Sie mittels der Potenzmengenkonstruktion einen äquivalenten DFA und wenden Sie auf diesen den aus der Vorlesung bekannten Minimierungsalgorithmus an. Dokumentieren Sie alle Zwischenschritte.

1.2.2 Lösung

die Übergangsfunktion führt zu folgendem Automaten:



damit kann man den folgenden DFA konstruieren:



Dieser ist nun zu Minimieren. Der Algorithmus besagt, dass zunächst alle nichterreichbaren Zustände entfernt werden sollen. In unserem Fall sind jedoch keine solchen Zustände vorhanden. Der nächste Schritt besteht darin, die Klasse $\overset{0}{\sim}$ zu definieren. Dies ist:

$$\overset{0}{\sim}: [2,4,5,6], [1,3,7]$$

Damit ist die Basis geschaffen, um über mehrere Iterationen alle benötigten Klassen zu bestimmen. Das Verfahren Terminiert, sobald sich zwei Klassen entsprechen. Dazu erstelle ich die folgende Tabelle:

$\overset{1}{\sim}$	a	b
1	$[2,4,5,6]_{\overset{0}{\sim}}$	$[1,3,7]_{\overset{0}{\sim}}$
2	$[1,3,7]_{\overset{0}{\sim}}$	$[2,4,5,6]_{\overset{0}{\sim}}$
3	$[1,3,7]_{\overset{0}{\sim}}$	$[2,4,5,6]_{\overset{0}{\sim}}$
4	$[2,4,5,6]_{\overset{0}{\sim}}$	$[2,4,5,6]_{\overset{0}{\sim}}$
5	$[2,4,5,6]_{\overset{0}{\sim}}$	$[1,3,7]_{\overset{0}{\sim}}$
6	$[1,3,7]_{\overset{0}{\sim}}$	$[2,4,5,6]_{\overset{0}{\sim}}$
7	$[2,4,5,6]_{\overset{0}{\sim}}$	$[2,4,5,6]_{\overset{0}{\sim}}$

Die Klassen von $\overset{1}{\sim}$ sind also:

$$[2,6], [1], [3], [4], [5], [7]$$

Und nun das Ganze nun noch für die Klasse $\overset{2}{\sim}$:

$\overset{2}{\sim}$	a	b
1	$[2,6]_{\overset{1}{\sim}}$	$[1]_{\overset{1}{\sim}}$
2	$[3]_{\overset{1}{\sim}}$	$[4]_{\overset{1}{\sim}}$
3	$[3]_{\overset{1}{\sim}}$	$[5]_{\overset{1}{\sim}}$
4	$[2,6]_{\overset{1}{\sim}}$	$[4]_{\overset{1}{\sim}}$
5	$[2,6]_{\overset{1}{\sim}}$	$[7]_{\overset{1}{\sim}}$
6	$[3]_{\overset{1}{\sim}}$	$[4]_{\overset{1}{\sim}}$
7	$[2,6]_{\overset{1}{\sim}}$	$[5]_{\overset{1}{\sim}}$

Die Klassen von $\overset{2}{\sim}$ sind also:

$$[1], [2], [3], [4], [5], [6], [7]$$

Damit sind wir auch schon am Ende angelangt, da keine Zustände mehr zusammengefaßt sind, werden alle weiteren Relationen kein neues Ergebnis bringen können.

1.3 Aufgabe 14

1.3.1 Aufgabenstellung

Sei $L_n \overset{def}{=} \left\{x1y \mid x, y \in \{0,1\}^*, |x| \leq n-1, |y| = n\right\}$. Beweisen Sie:

1. Es gibt einen NFA für L_n mit $2n+1$ Zuständen.
2. Jeder NFA für L_n hat mindestens $2n+1$ Zustände.
3. Jeder DFA für L_n hat mindestens 2^{n+1} Zustände.

1.3.2 Lösung

1. Durch Induktion für alle Wörter $w \in \Sigma^*$ beweist man:

   $$\begin{aligned} q_i \in \delta(q_0, w) &\iff |w| = i \wedge 0 \leq |w| \leq n-1 \\ p_i \in \delta(q_0, w) &\iff w = w'1w'', |w''| = i, 0 \leq |w''| \leq n, 0 \leq |w'| \leq n-1 \end{aligned}$$

   Damit gilt also für Wörter aus $T(M)$:

   $$\begin{aligned} w \in T(M) &\iff \delta(q_0, w) \cap F \neq \emptyset \\ &\iff p_n \in \delta(q_0, w) \\ &\iff w = w'1w'', |w''| = n, 0 \leq |w'| \leq n-1 \\ &\iff w \in L_n \end{aligned}$$

2. Sei nun $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein beliebiger NFA für die Sprache L_n. Zu zeigen ist nun:

$$|Q| \geq 2 \cdot n + 1$$

Dazu nehmen wir an, $|Q|$ wäre kleiner als $2 \cdot n + 1$. Offenstichtlich ist dann L_n endlich und die maximale Länge eines Wortes $w \in L_n$ beträgt $|w| = 2 \cdot n$. Wie sieht nun ein solches Wort w aus?
Behauptung:

$$\begin{array}{l} \forall 0 \leq i \leq l \leq 2 \cdot n\colon w = w'_i = w''_i, |w'_i| = l, |w''_i| = 2 \cdot n - i \\ \exists q_i \in Q\colon \delta\left(q_0, w'_i\right) \ni q_i \wedge \delta\left(q'_0, w''_i\right) \cap F \neq \emptyset \end{array}$$

Beweis: Dann gilt aber:

$$\text{Wenn gilt: } \nexists q_i \text{ dann ist } \delta\left(q_0, w\right) \cap F = \emptyset$$

und dies stellt einen Widerspruch dar. Wegen $|Q| < 2 \cdot n + 1$ gibt es ein i und ein j $(i < j)$ mit:

$$q_i = q_j - p$$

Daraus folgt:

$$\begin{array}{l} p \in \delta\left(q_0, w'_j\right) \wedge \left|w'_j\right| = j \\ p \in \delta\left(q_0, w'_i\right) \wedge |w'_i| = i \\ \delta\left(p, w''_j\right) \cap F \neq \emptyset, \left|w''_j\right| = 2 \cdot n - j \\ \delta\left(p, w''_i\right) \cap F \neq \emptyset, |w''_i| = 2 \cdot n - i \end{array}$$

Da aber $i < j$ ist folgt:

$$\delta\left(q_0, w'_j w''_i\right) > \delta\left(p, w''_i\right) \Rightarrow \delta\left(q_0, w'_j w''_i\right) \cap F \neq \emptyset$$

Damit folgt aber $w'_j w''_i \in T(M)$. Damit ist $\left|w'_j w''_i\right| = 2 \cdot n - i + j > 2 \cdot n + 1$ was einen Widerspruch darstellt.

3. Zu zeigen ist hier, dass jeder DFA für $L_n \geq 2^{n+1}$ Zustände hat. Seien nun $w_1, w_2 \in L_n$ mit $w_1 \neq w_2$. Dann ist:

$$\begin{array}{l} w_1 = a_r, a_{r-1}, \ldots, a_2, a_1 \text{ und} \\ w_2 = b_s, b_{s-1}, \ldots, b_2, b_1 \end{array}$$

mit $1 \leq r, s \leq n$ und $a_i, b_i \in \Sigma$.
Es sind nun zwei Fälle zu beachten. Zum einen:

- $r \neq s$ oBdA sei nun $r < s$ mit $u = 0^{n-r-1}10^n$ gilt:

$$\begin{array}{rcl} w_1 u & \in & L_n \text{ aber es gilt} \\ w_2 u & \notin & L_n \text{ wegen } |w_2 u| > 2 \cdot n \end{array}$$

$\Rightarrow \delta\left(q_0, w\right) \neq \delta\left(q_0, w_2\right)$

- Der Zweite Fall ist: $r = s$ Der Beweis hierzu geht analog wie der im Skript. Es se $u = 0^{n-i+1}$ dann folgt:

$$\delta\left(q_0, w_i u\right) \neq \delta\left(q_0, w_2 u\right)$$

Es gibt also insgesamt $2^{n+1} - 2$ solcher Worte. Hinzu kommen noch die akzeptierenden Zustände und die Startzustände.

1.4 Aufgabe 15

1.4.1 Aufgabenstellung

Beweisen Sie ohne Benutzung des Satzes von Nerode: Die folgenden drei Aussagen sind äquivalent:

1. L ist regulär.
2. L ist die Vereinigung von einigen Äquivalenzklassen einer Kongruenzrelation mit endlichem Index.
3. Der Index der Relation:

   $$x \sim y \iff (\forall w, w' \in \Sigma^* \colon wxw' \in L \iff wyw' \in L)$$

   ist endlich.

1.4.2 Lösung

Der Beweis funktioniert analog zu dem im Skript. Hier ist jedoch die $\rho - Relation$ definiert durch:

$$x\rho y \iff \delta(q,x) = \delta(q,y), \forall q \in Q$$

$1 \to 2$: Sei nun $R \subseteq \Sigma^*$ regulär. Damit gibt es einen DFA M mit $T(M) = R$. Für jedes $x \in \Sigma^*$ definiert man:

$$\begin{aligned} \delta_x &: Q \to Q \\ \delta_x(q) &= \delta(q,x) \text{ für alle } q \in Q \end{aligned}$$

Man definiert die Relation $\sim$ wie folgt:

$$\begin{aligned} x \sim y &\iff \delta_x = \delta_y \\ &\iff \forall q \in Q \colon \delta(q,x) = \delta(q,y) \end{aligned}$$

Diese Relation ist reflexiv und symmetrisch. Die Transitivität folgt aus:

$$\delta_x = \delta_y \text{ und } \delta_y = \delta_z \text{ d.h. es gilt auch } \delta_x = \delta_z \text{ und damit } x \sim z.$$

Also ist $\sim$ transitiv und damit eine Äquivalenzrelation.
Für jedes $x, y \in \Sigma^*$ und $q \in Q$ gilt:

$$\begin{aligned} \delta_{xy}(q) = \delta(q,xy) &= \delta(\delta(q,x), y) \\ &= \delta_y(\delta_x(q)) \\ &= \delta_x \circ \delta_y(q) \end{aligned}$$

Also ist $\delta_{xy} = \delta_x \circ \delta_y$. Sei $x \sim y$ und $z \in \Sigma^*$ beliebig gewählt. Es gilt:

$$\delta_{xy} = \delta_x \circ \delta_z = \delta_y \circ \delta_z = \delta_{yz}$$

damit ist $xz \sim yz$ und $\sim$ ist rechtsinvariant. Ebenso gilt:

$$\delta_{zx} = \delta_z \circ \delta_x = \delta_z \circ \delta_y = \delta_{zy}$$

Damit haben wir die Linksinvarianz. Somit ist $\sim$ eine Kongruenzrelation.
Es gibt $|Q|^{|Q|}$ verschiedene Funktionen von $Q \to Q$. Damit ist der Index von $\sim$ endlich.
Und es ist weiter:

$$T\left(M\right) = \left\{\langle x \rangle_{\sim} \mid \delta_x\left(q_0\right) \in F\right\}$$

Das sollte reichen um zu zeigen wie der Beweis funktioniert. Ansonsten funktioniert der Beweis genau, wie der Beweis im Skript.