Theoretische Informatik

Frank Bergmann

May 23, 2000

Contents

1 Übungsblatt 3

1.1 Aufgabe 9

1.1.1 Aufgabenstellung

Ein nichtdeterministischer endlicher Automat mit mehrerenAnfangszuständen(MNFA) sei definiert durch $M = (Q, \Sigma, \delta, Q_0, F)$ wobei $Q_0 \subseteq Q$ eine nicht-leere endliche Menge von Start-zuständen bezeichnet, alle anderen Komponenten entsprechen denen eines NFA. Die durch den Automaten akzeptierte Sprache sei $T(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \delta(Q_0, w) \cap F \neq \emptyset\}$, wobei δ wie üblich auf Zustandsmengen und Eingabewörter erweitert sei. Beweisen Sie: Jede von einem MNFA akzeptierte Sprache ist regulär.

1.1.2 Lösung

Zunächst interssiert erst einmal die Frage, wie ein δ', welches auf Zustandsmengen erweitert ist eigentlich aussieht, dazu helfen die folgenden Überlegungen:

$$\begin{aligned}
&\delta: Q \times \Sigma \to 2^Q \\
&\delta': 2^Q \times \Sigma^* \to 2^Q \\
&\delta'(A, \epsilon) = A, \ \forall A \in 2^Q \\
&\delta'(A, w\sigma) = \bigcup_{p \in \delta(A,w)} \delta(p, \sigma) \, \forall A \in 2^Q, w \in \Sigma^*, \sigma \in \Sigma
\end{aligned}$$

Wieder gilt definitionsgemäß, dass $\delta = \delta'$ ist. Um nun zu zeigen, dass die von dem MNFA akzeptierte Sprache regulär ist, konstruiert man einen DFA M' mit $T(M') = T(M)$. Dann ist ein NFA zu konstruieren. Mit dem Wissen, dass der Index der Nerode Relation endlich ist, kann man dann zeigen, dass $T(M')$ regulär ist.
Man beginnt also damit, dass man einen DFA mittels Potenzmengenkonstruktion erzeugt wird. Für den DFA M' gilt:

$$\begin{array}{lcl} M' & \overset{def}{=} & (Q', \Sigma, \delta'[Q_0], F') \\ Q' & \overset{def}{=} & \left\{[A] \mid A \in 2^Q\right\} \\ F' & \overset{def}{=} & \{[A] \in Q' \mid A \cap F \neq \emptyset\} \\ \delta'([A], \sigma) & \overset{def}{=} & [\delta(A, \sigma)] \ \forall [A] \in Q', \sigma \in \Sigma \end{array}$$

Von diesem DFA kann man zeigen, dass $T(M') = T(M)$ gilt. Es ist auch zu zeigen, dass sich die Definition auf die Erweiterung der δ-Funktion fortsetzt. Durch Induktion zeigt man also für alle $w \in \Sigma^*$:

$$\begin{array}{ccl} \delta(Q_0, w) & \overset{def}{=} & A \iff \delta'([Q_0], w) = [A] \\ w \in T(M) & \iff & \delta(Q_0, w) = A \wedge A \cap F \neq \emptyset \\ & \iff & \delta'([Q_0], w) = [A] \wedge [A] \in F' \\ & \iff & w \in T(M') \end{array}$$

Also gilt $T(M') = T(M)$. Nun konstruieren wir einen äquivalenten NFA dazu:

$$\begin{array}{lcl} M'' & \overset{def}{=} & (Q'', \Sigma, \delta'', q_0', F'') \\ Q'' & \overset{def}{=} & Q' \cup \{q_0'\}, q_0' \notin Q' \\ F'' & \overset{def}{=} & F' \cup \{q_0' \mid \epsilon \in T(M)\} \\ \delta''(q_0', \sigma) & \overset{def}{=} & \delta(Q_0, \sigma), \forall \sigma \in \Sigma \\ \delta''(q, \sigma) & \overset{def}{=} & \delta(q, \sigma), \forall q \in Q', \sigma \in \Sigma \end{array}$$

Damit ist gezeigt, dass auch die Sprache des MNFAs regulär ist.

1.2 Aufgabe 10

1.2.1 Aufgabenstellung

Für ein Eingabewort $w = \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n \in \Sigma^*, \sigma_i \in \Sigma, \forall 1 \leq i \leq n$, bezeichne $w^R = \sigma_n \ldots \sigma_2\sigma_1$ das Reversal-Wort zu w. Für eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ sei die Reversal-Sprache definiert als:

$$L^R = \left\{w^R \in \Sigma^* \mid w \in L\right\}$$

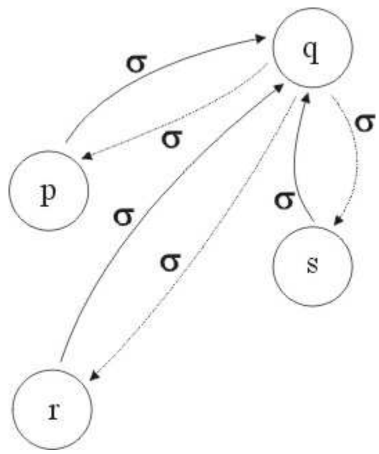
Sei weiter $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA und der zu M gehörende Reversal-MNFA M^R definiert durch $M^R = \left(Q, \Sigma, \delta^R, F, \{q_0\}\right)$ mit:

$$\delta^R(p, \sigma) = \{q \in Q \mid p = \delta(q, \sigma)\} \text{ fr alle } p \in Q, \sigma \in \Sigma.$$

Beweisen Sie: $T\left(M^R\right) = T(M)^R$.

1.2.2 Lösung

Hier erst einmal ein Bild, welches etwas zum Verständnis der Aufgabe beitragen sollte:



Das Beispiel zeigt, dass zu einem Zustand q mehrere Zustände existieren, welche mit dem Zeichen σ erreichbar sind. In anderen Worten:

$$\delta^R(q,\sigma) = \{p, r, s\}$$

Dies zeigt uns, dass wir auf jeden Fall in einem NFA landen werden. Zu zeigen ist nun, dass beide Automaten das selbe tun, also dass $T\left(M^R\right) = T\left(M\right)^R$ gilt.

Dies kann man durch Induktion nach der Wortlänge $|w|$ zeigen. Für alle $w \in \Sigma^*, p, q \in Q$ gilt:

$$\delta(q,w) = q \iff \delta^R\left(q, w^R\right) \ni p$$

Verankerung$|w| = n = 0$ *:* Es gilt:

$$\delta(p,\epsilon) = q \iff \delta^R(q,\epsilon) = p \text{ da } p = q \text{ ist.}$$

Schritt $n \to n+1$*:* Seien $p, q \in Q$ und $w\sigma \in \Sigma^{n+1}, \sigma \in \Sigma$ dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\delta(p,w\sigma) = q \iff \exists p' \in Q\colon \delta(p,q) = p' \wedge \delta(p,\sigma) = q \\
&\iff \exists p' \in Q\colon p \in \delta^R\left(p', w^R\right) \wedge p' \in \delta^R(q,\sigma) \\
&\iff p \in \delta^R\left(q, \sigma w^R\right) \\
&\iff p \in \delta^R\left(q, (w\sigma)^R\right)
\end{aligned}$$

damit wäre gezeigt ,dass die Übergangsfunktion auch für Wörter definiert ist.

Um nun zu zeigen, dass $T\left(M^R\right) = T\left(M\right)^R$ ist:

$$\begin{aligned} w \in T\left(M\right) &\iff \delta\left(q_0, w\right) \in F \\ &\iff \delta\left(q_0, w\right) = f \wedge f \in F \\ &\iff q_0 \in \delta^R\left(f, w^R\right) \wedge f \in F \\ &\iff q_0 \in \delta^R\left(F, w^R\right) \\ &\iff \delta^R\left(F, w^R\right) \cap \{q_0\} \neq 0 \\ &\iff w^R \in T\left(M^R\right) \end{aligned}$$

Und somit ist $T\left(M^R\right) = T\left(M\right)^R$.

1.3 Aufgabe 11

1.3.1 Aufgabenstellung

Beweisen Sie den *Satz von Brzozowski*: Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA für L ohne nicht-erreichbare Zustände und M^R der zu M gehörende Reversal-MNFA. Dann ist der aus M^R durch Potenzmengenkonstruktion erzeugte DFA $M' = (Q', \Sigma, \delta', [F], F')$ mit:

$$\begin{aligned} Q' &\overset{def}{=} \left\{[A] \mid A \in 2^Q \wedge \exists w \in \Sigma^* \colon \delta^R\left(F, w\right) = A\right\} \\ F' &\overset{def}{=} \{[A] \in Q' \mid q_0 \in A\} \\ \delta'\left([A], \sigma\right) &\overset{def}{=} \left[\delta^R\left(A, \sigma\right)\right] \text{ fuer alle } [A] \in Q', \sigma \in \Sigma \end{aligned}$$

ein minimaler DFA für L^R.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass der DFA L^R akzeptiert und beweisen Sie dann, dass der Autmoat minimal ist. Wenn Sie geschickt sind, kann der erste Teil des Beweises bereits durch Aufgabe 9 erfolgen.

1.3.2 Lösung

Zuerste einmal eine Anmerkung: Geschickt bedeutet , bei der 9 die Potenzmengenkonstruktion agewandt zu haben, damit folgt die Behauptung. Somit ist $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein DFA ohne nichterreichbare Zustände. Ein Zustand $q$ist dann nicht ereichbar, falls es kein Wort $w \in \Sigma^*$ gibt mit $\delta\left(q_0, w\right) = q$. Sei nun weiterhin M^R ein MNFA mit $T\left(M^R\right) = T\left(M\right)^R$ und M' durch Potenzmengenkonstruktion aus M^R gewonnen. Nach den Aufgaben 9 und 10 folgt:

$$T\left(M'\right) = T\left(M^R\right) = T\left(M\right)^R$$

Zu zeigen ist nun, dass M' ein minimaler DFA ist:
Minimalität bedeutet:

- jeder Zustand ist erreichbar,
- M' ist reduziert, d.h. für alle $[A], [B] \in Q'$mit $[A] \neq [B]$ existiert ein $w^R \in \Sigma^*$ mit:

  $$\left(\delta'\left([A], w^R\right) \in F' \wedge \delta'\left([B], w^R\right) \notin F\right) \vee \left(\delta'\left([A], w^R\right) \notin F' \wedge \delta'\left([B], w^R\right) \in F\right)$$

Diese beiden Zustände können nicht zusammenfallen, da sonst eine falsche Sprache akzeptiert werden würde.

Die Erreichbarkeit der Zustände folgt direkt aus der Definition. Also bleibt nur die Reduzibilität zu zeigen. Wir betrachten dazu zwei verschiedene Zustände. Verschieden bedeutet:

$$\exists q \in Q \colon (q \in A \wedge q \notin B) \vee (q \notin A \wedge q \in B)$$

Sei nun M ein DFA ohne nicht-erreichbare Zustände, also:

$$\exists w \in \Sigma^* \colon \delta(q_0, w) = q$$

Bei Aufgabe 10 wurde gezeigt, dass:

$$\begin{array}{l} \delta(q_0, w) = q \iff \delta^R(q, w) = q_0 \\ \forall p \in Q - \{q\} : \delta(q_0, w) = p \iff q_0 \notin \delta^R(p, w) \end{array}$$

Es sei $[A], [B] \in Q'$ mit $[A] \neq [B]$. Dann gibt es ein $q \in Q$ mit:

1. $q \in A \wedge q \notin B$ oder
2. $q \notin A \wedge q \in B$

Wir betrachten ObdA nur den Fall:

$$q \in A \wedge q \notin B$$

Da in M jeder Zustand erreichbar ist, gibt es ein Wort $w \in \Sigma^*$ mit:

$$\delta(q_0, w) = q$$

Damit folgt nach Aufgabe 10:

$$q_0 \in \delta^R\left(q, w^R\right)$$

und wegen

$$q_0 \in \delta^R\left(q, w^R\right) \iff \delta(q_0, w) = q$$

folgt

$$q_0 \in \delta^R\left(p, w^R\right), \forall p \in Q \text{ mit } p \neq q$$

denn es ist $\delta(q_0, w) = p$. Damit ist

$$\delta'\left(A, w^R\right) \ni q_0 \wedge \delta^R\left(B, w^R\right) \ni q_0$$

Also gilt, dass:

$$\delta'\left([A], w^R\right) \in F' \wedge \delta'\left([B], w^R\right) \notin F'$$

und damit ist M' reduzibel.