Theoretische Informatik

Frank Bergmann

May 16, 2000

Contents

1 Übungsblatt 2 **1**

1.1 Aufgabe 5 . . . 1

1.1.1 Aufgabenstellung . . . 1

1.1.2 Lösung . . . 2

1.2 Aufgabe 6 . . . 2

1.2.1 Aufgabenstellung . . . 2

1.2.2 Lösung . . . 3

1.3 Aufgabe 7 . . . 4

1.3.1 Aufgabenstellung . . . 4

1.3.2 Lösung . . . 4

1.4 Aufgabe 8 . . . 6

1.4.1 Aufgabenstellung . . . 6

1.4.2 Lösung . . . 6

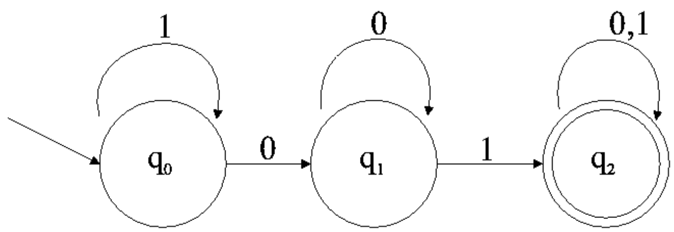
1 Übungsblatt 2

1.1 Aufgabe 5

1.1.1 Aufgabenstellung

Konstruieren Sie einen DFA für die Sprache $L = \left\{x01y \mid x, y \in \{0,1\}^*\right\}$. Beweisen Sie exakt (durch vollständige Induktion), dass der Automat diese Sprache akzeptiert.

1.1.2 Lösung



Wir zeigen durch Indiktion, dass der abgebilgete Automat die gegebene Sprache akzeptiert:

$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, w) = q_0 &\iff w = 1^i \text{ für } i \geq 0 \\
\delta(q_0, w) = q_0 &\iff w = 1^i 0^j \text{ für } i \geq 0, j \geq 1 \\
\delta(q_0, w) = q_0 &\iff w = x01y \text{ für alle } x, y \in \Sigma^*
\end{aligned}
$$

Verankerung: Für die Wortlängen 0 und 1 ist die Behauptung trivial.
Schritt: Sei dei Behauptung für alle $w \in \Sigma^*$ mit $|w| = n$ bewiesen. Dann gilt für $x = w\sigma$ mit $|w| = n$ und $\sigma \in \Sigma$:

$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, w\sigma) = q_0 &\iff \delta(q_0, w) = q_0 \wedge \sigma = 1 \\
&\iff w = 1^i \text{ für } i \geq 0 \wedge \sigma = 1 \\
&\iff w\sigma = 1^i \text{ für } i \geq 0 \\
\delta(q_0, w\sigma) = q_1 &\iff (\delta(q_0, w) = q_0 \wedge \sigma = 0) \vee (\delta(q_0, w) = q_1 \wedge \sigma = 0) \\
&\iff \big(w = 1^i \text{ für } i \geq 0 \wedge \sigma = 0\big) \vee \big(w = 1^i 0^j \text{ für } i \geq 0, j \geq 1 \wedge \sigma = 0\big) \\
&\iff \big(w\sigma = 1^i 0 \text{ für } i \geq 0\big) \vee \big(w\sigma = 1^i 0^j \text{ für } i \geq 0, j \geq 1\big) \\
&\iff w\sigma = 1^i 0^j \text{ für } i \geq 0, j \geq 1 \\
\delta(q_0, w\sigma) = q_2 &\iff (\delta(q_0, w) = q_1 \wedge \sigma = 1) \vee (\delta(q_0, w) = q_2 \wedge \sigma \in \{0,1\}) \\
&\iff \big(w = 1^i 0^j \text{ für } i \geq 0, j \geq 1 \wedge \sigma = 1\big) \vee \big(w = u01v \text{ für } u, v \in \{0,1\}^* \wedge \sigma \in \{0,1\}\big) \\
&\iff w\sigma = u01v \text{ für } u, v \in \{0,1\}^*
\end{aligned}
$$

Dann gilt für alle Wörter w aus Σ^*:

$$
\begin{aligned}
w \in T(M) &\iff \delta(q_0, w) \in F \\
&\iff \delta(q_0, w) = q_2 \\
&\iff w = u01v \text{ für } u, v \in \{0,1\}^*
\end{aligned}
$$

Und eben das war zu zeigen.

1.2 Aufgabe 6

1.2.1 Aufgabenstellung

Sei m eine natürliche Zahl. $L \subseteq \{0,1\}^*$ sei definiert als die Menge aller $w = a_n \ldots a_1 a_0$ für welche die durch dieses Wort dargestellte Zahl $\sum_{0 \leq i \leq n} a_i 2^i$ durch m teilbar ist.

1. Konstruieren Sie einen DFA für L_m mit höchstens m Zuständen.
2. Konstruieren Sie für Zweierpotenzen $m = 2^k$ einen DFA für L_m mit $k+1$ Züständen.

Begründen Sie jeweils die Korrektheit der Automaten.

1.2.2 Lösung

1. Die Idee ist es, in den Zuständen die Restklassen modulo m zu speichern, welche der Zahl des gelesenen Wortes entspricht. Es gilt:

   $$\begin{array}{ll} \text{Falls} & \phi\left(x\right) \bmod m = r, \text{ dann ist} \\ & \phi\left(x0\right) \bmod m = 2r \bmod m \text{ und} \\ & \phi\left(x\right) \bmod m = 2r+1 \bmod m \\ \text{Dabei ist } \phi\left(x1\right) & \text{die mit dem Wert assoziierter Zahl} \end{array}$$

   Man definiert nun den DFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit:

   $$\begin{array}{lcl} Q & = & \{q_i \mid 0 \leq i \leq n-1\} \\ \delta\left(q_i, 0\right) & = & q_{(2i \bmod m)} \text{ für alle } q_i \in Q \\ \delta\left(q_i, 1\right) & = & q_{(2i+1 \bmod m)} \text{ für alle } q_i \in Q \\ F & = & \{q_0\} \end{array}$$

   Durch Induktion kann man nun zeigen, dass für alle Wörter aus Σ^*gilt: $\delta\left(q_0, w\right) = q_{\phi(w) \bmod r}$.

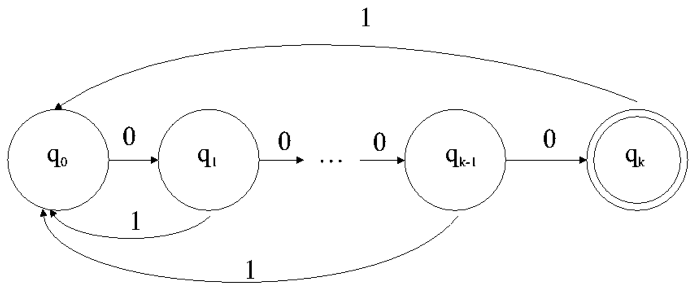
   $$\begin{array}{rcl} \forall w \in \Sigma^* : w \in T\left(M\right) & \iff & \delta\left(q_0, w\right) \in F \\ & \iff & \delta\left(q_0, w\right) = q_0 \\ & \iff & \phi\left(w\right) \bmod r = 0 \end{array}$$

   Bei der Klausur sind Induktionsbeweise nicht unbedingt notwendig. Jedoch wird zumindest Wert darauf gelegt, dass man die Behauptung aufstellen kann.

2. Man kann zeigen, dass für alle Wörter w aus Σ^* $\phi\left(w\right)$ gerade, dann durch $m = 2^k$ teilbar, wenn die letzten k Stellen von w 0 sind. Das Wort kann also nur 2 Formen annehmen:

   $$w = x0^k, k \geq 1 \text{ der } w = 0^i, i \geq 0$$

   Ein DFA für die Sprache $L_m = \left\{x0^k \middle| \, x \in \Sigma^*\right\} \vee \left\{0^l \mid l \geq 0\right\}$ kann aussehen, wie in Bild 1.2.2 gezeigt. Der Beweis soll hier nicht geführt werden.



1.3 Aufgabe 7

1.3.1 Aufgabenstellung

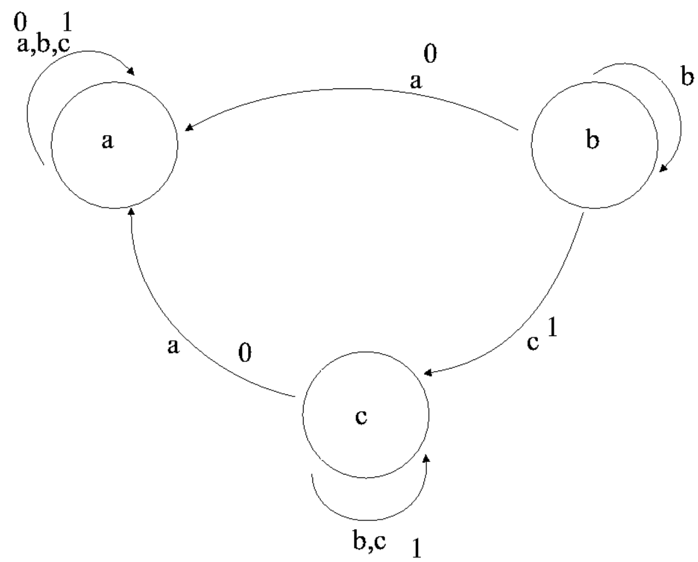
Sei $\langle M, \circ \rangle$ ein endglicher Moniod $M = \{a, b, c\}$ und der Verknüpfung "$\circ$" definiert durch:

$\circ$	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	c
c	a	c	c

Sei $h: \{0,1\}^* \to M$ ein Homomorphismus mit $h(0) = a$ und $h(1) = c$. Für ein Element $x \in M$ sei $h^{-1}(x) = \left\{w \in \{0,1\}^* \mid h(w) = x\right\}$ Berechnen Sie $h^{-1}(a)$ und $h^{-1}(c)$.

1.3.2 Lösung

Der Graph im Bild zeigt gut, wie man sich die Verknüpfung vorstellen kann.



Damit komit man schnell auf die Idee, dass $h^{-1}(a) = \left\{u0v \,|\, u, v \in \{0,1\}^*\right\}$ und $h^{-1}(c) = \left\{1^i \,|\, i \geq 1\right\}$ gilt. Wir zeigen nun zuerst, dass für alle $w \in \Sigma^*$ gilt:

$$h(w) = c \iff w = 1^k \text{ für } k \geq 1$$

Zuerst die Richtung: “$\Leftarrow$” mittels Induktion über die Länge der Wörter:
Verankerung: Für Wörter der Länge 1 idt die Behauptung trivial.
Schritt $n \to n+1$:

$$\begin{aligned} h\left(1^{k+1}\right) &= h\left(1^k\right) \circ h(1) \\ &= c \circ c \\ &= c \end{aligned}$$

Und nun wieder durch Induktion über die Wortlänge $|w|$ die Richtung “$\Rightarrow$”
Verankerung: Für die Wortlänge $|w| = 1$ gilt $h(0) = a$ und $h(1) = c$
Schritt $|w| = n+1$*:* Für $w = x$ sei die behauptung schon gezeigt. Nun ist also $w = x\sigma, \sigma \in \Sigma$. Auch hierbei gilt wieder:

$$h(x\sigma) = h(x) \circ h(\sigma)$$

Fall: $\sigma = 0$:

$$\begin{aligned} h(x) \circ h(0) &= h(x) \circ a \\ &= a \\ \text{also ist } h(x\sigma) &\neq c \end{aligned}$$

Fall $\sigma = 1$:

$$\begin{array}{lcl} h(x) \circ h(1) & = & h(x) \circ c \\ h(x) = a & \Rightarrow & h(x) \circ c = a \circ c = a \\ h(x) = b & \Rightarrow & h(x) \circ c = b \circ c = c \\ h(x) = c & \Rightarrow & h(x) \circ c = c \circ c = c \end{array}$$

Dabei ist zu beachten, dass $h(x) = b$ nicht vorkommt für $x \neq \epsilon$.
Für $h(x) = c$ ist nach der Verankerung: $x = 1^n$, also $x\sigma = 1^{n+1}$. Für alle $w \in \Sigma^*$ gilt: $h(w) = a \vee h(w) = c$ also ist:

$$h^{-1}(a) = \Sigma^* - h^{-1}(c) = \{u0v \mid u, v \in \Sigma^*\}$$

und das war zu zeigen.

1.4 Aufgabe 8

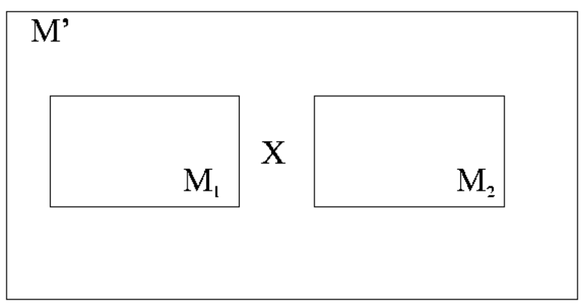
1.4.1 Aufgabenstellung

Gegeben seien zwei DFA $M_i = \left(Q_i, \Sigma_i, \delta_i, q_0^i, F_i\right)$ für $(i = 1, 2)$

1. Konstruieren Sie *direkt* (ohne Verwendung der Potenzmengenkonstruktion) einen DFA M' mit $T(M) = T(M_1) \cup T(M_2)$. Beweisen Sie, dass der von Ihnen definierte Automat tatsächlich diese Sprache akzeptiert.

2. Konstruieren Sie einen NFA M'' mit $T(M'') = T(M_1) \cup T(M_2)$, der nicht mehr als $|Q_1| + |Q_2| + 1$ Zustände und beweisen Sie dessen Korrektheit.

1.4.2 Lösung



1. Die Lösungsidee ist, wie im Bild schon gezeigt, die Konstruktion des DFA's mittels einer Methode, inspiriert, durch das Kreuzprodukt. Der DFa ist danach: $M' = \left(Q, \Sigma, \delta, \left[q_0^1, q_0^2\right], F\right)$ mit:

$$\begin{array}{lcl} Q & = & \{[p,q] \mid p \in Q_1, q \in Q_2\} \\ \delta([p,q], \sigma) & = & [\delta_1(p,\sigma), \delta_2(q,\sigma)] \text{ für alle } [p,q] \in Q, \sigma \in \Sigma \\ F & = & \{[p,q] \mid p \in F_1 \vee q \in F_2\} \end{array}$$

zu Zeigen ist nun, dass: $T(M') = T(M_1) \cup T(M_2)$. Dies zeigt man am besten durch Induktion über die Länge der Wörter. Zu zeigen ist nun:

$$\forall [p,q] \in Q, w \in \Sigma^* \colon \delta([p,q], w) = [\delta_1(p,w), \delta_2(q,w)]$$

Verankerung: $|w| = 0 \Rightarrow w = \epsilon$

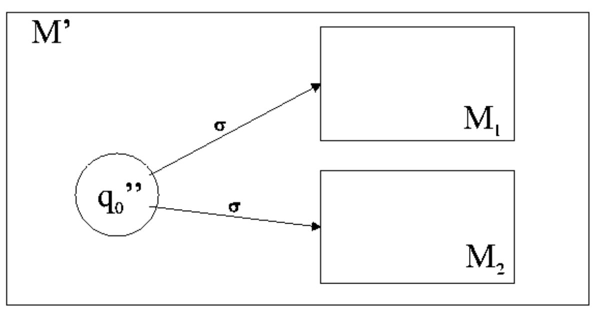
$$\delta([p,q], \epsilon) = [p,q] = [\delta_1(p,\epsilon), \delta_2(q,\epsilon)]$$

Schritt: Sei die Behauptung für $|w| = n$ bewiesen und nun $|w| = n+1$. Also ist $w = x\sigma$, $\sigma \in \Sigma$. Es ist nun:

$$\begin{aligned}
\delta([p,q], w) &= \delta([p,q], x\sigma) \\
&= \delta(\delta([p,q], x), \sigma) \\
&= \delta([\delta_1(p,x), \delta_2(q,x)], \sigma) \\
&= [\delta_1(\delta_1(p,x), \sigma), \delta_2(\delta_2(q,x), \sigma)] \\
&= [\delta_1(p, x\sigma), \delta_2(q, x\sigma)]
\end{aligned}$$

Nun bleibt noch die Frage, wie daraus $T(M') = T(M_1) \cup T(M_2)$ folgen soll. Der Beweis sieht wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
w \in T(M') &\iff \delta\left(\left[q_0^1, q_0^2\right], w\right) \in F \\
&\iff \left[\delta_1\left(q_0^1, w\right), \delta_2\left(q_0^2, w\right)\right] \in F \\
&\iff \delta_1\left(q_0^1, w\right) \in F_1 \vee \delta_2\left(q_0^2, w\right) \in F_2 \\
&\iff w \in T(M_1) \vee w \in T(M_2) \\
&\iff w \in T(M_1) \cup T(M_2)
\end{aligned}$$



2.

Die Konstruktion der Teilaufgabe 1) hat $|Q_1| \cdot |Q_2|$ Zustände. Dies sind jedoch weit mehr, als gefordert sind. Das Bid zeigt die neue Idee. Die formale Definition für M'' ist dann:

$$M'' = \left(Q'', \Sigma, \delta'', q_0^{''}, F''\right)$$

mit:

$$
\begin{array}{lcl}
Q'' & = & \left\{q_0^{''}\right\} \cup Q_1 \cup Q_2 \wedge Q_1 \cap Q_2 = \emptyset \\
\delta''\left(q_0^{''}, \sigma\right) & = & \left\{\delta_1\left(q_0^1, \sigma\right), \delta_2\left(q_0^2, \sigma\right)\right\}. \ \forall \sigma \in \Sigma \\
\delta''\left(q, \sigma\right) & = & \left\{\delta_1\left(q_0^1, \sigma\right)\right\}. \ \forall q \in Q_1, \sigma \in \Sigma \\
\delta''\left(q, \sigma\right) & = & \left\{\delta_2\left(q_0^2, \sigma\right)\right\}. \ \forall q \in Q_2, \sigma \in \Sigma \\
F'' & = & \{q \in Q'' \mid q \in F_1 \cup F_2\} \cup \left\{q_0^{''} \mid q_0^1 \in F_1 \vee q_0^2 \in F_2\right\}
\end{array}
$$

Durch Induktion über die Wortlänge $|w|$, ergibt sich:

$$
\begin{array}{l}
\forall w \in \Sigma^* \text{ ausser } w = \epsilon \\
\delta''\left(q_0^{''}, w\right) = \left\{\delta_1\left(q_0^1, w\right), \delta_2\left(q_0^2, w\right)\right\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
\forall w \in \Sigma^{'} & & \\
w \in T\left(M''\right) & \Longleftrightarrow & \delta''\left(q_0^{''}, w\right) \cap F \neq \emptyset \\
& \Longleftrightarrow & \left\{\delta_1\left(q_0^1, w\right), \delta_2\left(q_0^2, w\right)\right\} \cap \left(F_1 \cap F_2\right) = \emptyset \\
& \Longleftrightarrow & \left\{\delta_1\left(q_0^1, w\right)\right\} \cap F_1 \neq \emptyset \cup \left\{\delta_2\left(q_0^2, w\right)\right\} \cap F_2 \neq \emptyset \\
& \Longleftrightarrow & \delta_1\left(q_0^1, w\right) \in F_1 \vee \delta_2\left(q_0^2, w\right) \in F_2 \\
& \Longleftrightarrow & w \in T\left(M_1\right) \vee w \in T\left(M_2\right) \\
& \Longleftrightarrow & w \in T\left(M_1\right) \cup T\left(M_2\right)
\end{array}
$$

Außerdem gilt:

$$
\begin{array}{l}
\epsilon \in T\left(M''\right) \iff \epsilon T\left(M_1\right) \cup T\left(M_2\right) \\
T\left(M''\right) = T\left(M_1\right) \cup T\left(M_2\right)
\end{array}
$$

Damit ist bewiesen, dass der NFA die Sprache Akzeptiert.