Frank Bergmann
Bockenheimer Landstasse 135 / 221

60325 Frankfurt / Main

bergmann@cs.uni-frankfurt.de

Theoretische Informatik

Frank Bergmann

May 15, 2000

Contents

1 Übungsblatt 1

1.1 Aufgabe 1

1.1.1 Aufgabenstellung

Seien $\{M_i, \circ_i\}$ algebraische Strukturen $(i = 1, 2)$und $h : M_1 \to M_2$ ein Homomorphismus. Beweisen Sie:

1. Ist $\{M_2, \circ_2\}$ assoziativ und h surjektiv, dann ist auch $\{M_1, \circ_1\}$ assoziativ.
2. Ist $\{M_1, \circ_1\}$ assoziativ und h injektiv, dann ist auch $\{M_2, \circ_2\}$ assoziativ.

1.1.2 Lösung

Zuerst sollte ich vielleicht nochmals festhalten, was *Injektivität* bzw. *Surjektivität* eigentlich ist. Eine Abbildung ist dann injektiv wenn gilt: zwei Elemente $a, b \in S_1$ und $h(a) = h(b)$ dann ist $a = b$. Eine Abbildung ist dann surjektiv, wenn gilt: Für alle Elemente $b \in S_2$existiert ein $a \in S_1$ der Art, dass $h(a) = b$

1. Gegeben sind die Strukturen $\{M_1, \circ_1\}$ und $\{M_2, \circ_2\}$, wobei die Struktur $\{M_2, \circ_2\}$ assotiativ ist. Desweiteren ist ein bijektiver Homomorphismus $h : M_1 \to M_2$gegeben.
   Zu Zeigen ist nun, dass $\{M_1, \circ_1\}$ assoziativ ist.
   Der Beweis erfolgt nun wie folgt:
   Seien $a_1, a_2, a_3 \in M_1$ dann gilt:

$$\begin{aligned} h(a_1 \circ_1 (a_2 \circ_1 a_3)) &= h(a_1) \circ_2 h(a_2 \circ_1 a_3) \\ &= h(a_1) \circ_2 (h(a_2) \circ_2 h(a_3)) \\ &= (h(a_1) \circ_2 h(a_2)) \circ_2 h(a_3) \\ &= (a_1 \circ_1 a_2) \circ_2 h(a_3) \\ &= h((a_1 \circ_1 a_2) \circ_1 a_3) \end{aligned}$$

   Aus der Injektivität folgt also die Assoziativität. Und so gilt:

$$a_1 \circ_1 (a_2 \circ_1 a_3) = (a_1 \circ_1 a_2) \circ_1 a_3$$

2. Beim zweiten geforderten Beweis dieser Aufgabe sind wieder die beiden Strukturen $\{M_1, \circ_1\}$ und $\{M_2, \circ_2\}$gegeben. Diesmal ist $\{M_1, \circ_1\}$assoziativ und es soll gezeigt werden, dass der surjektive Homomorphismus $h : M_1 \to M_2$ausreicht, um zu zeigen, dass $\{M_2, \circ_2\}$ assoziativ ist.
   Seien $b_1, b_2, b_3 \in M_2$, dann gibt es Elemente $a_1, a_2, a_3 \in M_1$der Art, dass $h(a_1) = b_1$, $h(a_2) = b_2$ und $h(a_3) = b_3$sind. Dann gilt:

$$\begin{aligned} b_1 \circ_2 (b_2 \circ_2 b_3) &= h(a_1) \circ_2 (h(a_2) \circ_2 h(a_3)) \\ &= h(a_1) \circ_2 (a_2 \circ_1 a_3) \\ &= h(a_1 \circ_1 (a_2 \circ_1 a_3)) \\ &= h(a_1 \circ_1 a_2) \circ_2 h(a_3) \\ &= (h(a_1) \circ_2 h(a_2)) \circ_2 h(a_3) \\ &= (b_1 \circ_2 b_2) \circ_2 b_3 \end{aligned}$$

1.2 Aufgabe 2

1.2.1 Aufgabenstellung

Seien Σ und $\triangle$ zwei Aplphabete. Beweisen Sie:

1. Zu jeder Abbildung $h : \Sigma \to \triangle^*$ gibt es genau einen Homomorphismus $\tilde{h} : \Sigma^* \to \triangle^*$mit $h(a) = \tilde{h}(a)$ für alle $a \in \Sigma$.

2. Zu jedem Homomorphismus $\tilde{h} : \Sigma^* \to \triangle^*$gibt es genau eine Abbildung $h : \Sigma \to \triangle^*$mit $h(a) = \tilde{h}(a)$ für alle $a \in \Sigma$.

1.2.2 Lösung

Zuerst noch zwei Hinweise zu den Symbolen. Σ und $\triangle$ stellen endliche Mengen von Wörtern dar. Währendessen ist Σ^* ein freies Monoid über Σ.

1. Wir habene eine Abbilgung $h : \Sigma \to \triangle^*$gegeben. Nun ist zu zeigen, dass es genau einen Homomorphismus $\tilde{h} : \Sigma^* \to \triangle^*$gibt, so dass $h(a) = \tilde{h}(a)$ für alle Ellemente $a \in \Sigma$ gilt. Es ist notwendig zum einen die *Existenz* und zum anderen die *Eindeutigkeit* des Homomorphismusses zu zeigen. Zuerst zeige ich die *Existenz*
   Man definiert $\tilde{h} : \Sigma^* \to \triangle^*$durch $\tilde{h}(w) = h(a_1)\,h(a_2)\ldots h(a_n)$ für $w = a_1 a_2 \ldots a_n$ mit $a_i \in \Sigma$, $1 \leq i \leq n$. Zu zeigen ist nun, dass $\tilde{h}$ auch eine homomorphe Abbildung von $\Sigma^* \to \triangle^*$ist.
   Für alle $u, v \in \Sigma^*$(also $u = a_1 \ldots a_n$ und $v = b_1 \ldots b_n$ für $a_i, b_i \in \Sigma$, $1 \leq i \leq n$) gilt:
   $$h(uv) = h(u)\,h(v)$$
   damit folgt unittelbar:
   $$\begin{aligned} \tilde{h}(uv) &= (h(a_1)\,h(a_2)\ldots h(a_n))\,(h(b_1)\,h(b_2)\ldots h(b_n)) \\ &= \tilde{h}(u)\,\tilde{h}(v) \end{aligned}$$

2. Es bleibt also noch die *Eindeutigkeit* zu zeigen. Seien $\overline{h}$ und $\tilde{h}$ zwei Homomorphismen von $\Sigma^* \to \triangle^*$mit:
   $$\overline{h}(a) = \tilde{h}(a) = h(a)\,, \forall a \in \Sigma$$
   Dann gilt für ein beliebiges Wort $w = a_1 a_2 \ldots a_n \in \Sigma^*$:
   $$\begin{aligned} \tilde{h}(w) &= \tilde{h}(a_1)\ldots\tilde{h}(a_n) \\ &= h(a_1)\ldots h(a_n) \\ &= \overline{h}(a_1)\ldots\overline{h}(a_n) \\ &= \overline{h}(w) \end{aligned}$$
   $$\Rightarrow \tilde{h}\,\text{und}\,\overline{h}\,\text{sind gleich}$$

1.3 Aufgabe 3

1.3.1 Aufgabenstellung

Sei A eine Menge von $R \subseteq A \times A$ eine transitive Relation. Beweisen oder wiederlegen Sie folgende Aussagen:

1. Die Relation R_1 enthalte $(a, b) \in R_1$definitionsgemäß genau dann wenn $(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R$. Dann ist R_1 eine Äquivalenzrelation.

2. Die Relation R_2 enthalte $(a, b) \in R_2$definitionsgemäß genau dann wenn $((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R) \vee (a = b)$. Dann ist R_2 eine Äquivalenzrelation.

3. Die Relation R_3 enthalte $(a, b) \in R_3$definitionsgemäß genau dann wenn $(a, b) \in R \vee (b, a) \in R$. Dann ist R_3 eine Äquivalenzrelation.

4. Die Relation R_4 enthalte $(a, b) \in R_4$definitionsgemäß genau dann wenn $((a, b) \in R \vee (b, a) \in R) \vee (a = b)$. Dann ist R_4 eine Äquivalenzrelation.

1.3.2 Lösung

Um zu zeigen, dass eine Relation eine Äquivalentrelation ist, ist zu zeigen, dass sie reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.

1. Die Aussage ist falsch. Deswegen reicht es ein Gegenbeispiel zu finden. Ein Gegenbeispiel zu der Aussage wäre:

$$\begin{aligned} & A = \{1,2,3\} \\ & \Rightarrow R = \{(1,2),(2,3),(1,3)\} \\ & \Rightarrow R_1 = \{\emptyset\} \end{aligned}$$

2. Die Aussage ist wahr. Also bleibt zu zeigen, dass die Relation R_2 reflexiv, transitiv und symmetrisch ist.
   Die *Reflexivität* folgt aus der Definition von R_2.
   Die *Transitivität* ist wie folgt zu beweisen: Seien $(a,b) \in R_2$und $(b,c) \in R_2$ so ist auch $(a,c) \in R_2$. Aus der Definition der Relation folgt:

$$\begin{aligned} (a,b) \in R_2 &\iff ((a,b) \in R \wedge (b,a) \in R) \vee (a = b) \\ (b,c) \in R_2 &\iff ((b,c) \in R \wedge (c,b) \in R) \vee (b = c) \end{aligned}$$

   Es treten also die folgenden Fälle auf:

$$\begin{array}{ll} a = b) & (b,c) \in R_2 \Rightarrow (a,c) \in R_2 \\ b = c) & (a,b) \in R_2 \Rightarrow (a,c) \in R_2 \\ a \neq b,\, b \neq c) & (a,b) \in R_2 \wedge (b,c) \in R_2 = (a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \wedge (b,c) \in R \wedge (c,b) \in R \\ & \Rightarrow (a,c) \in R \wedge (c,a) \in R \\ & \Rightarrow (a,c) \in R_2 \end{array}$$

   Nun bleibt also nur noch die *Symmetrie* zu zeigen. Die folgt aber schon ganz leicht aus der Definition.

$$\begin{aligned} (a,b) \in R_2 &\iff ((a,b) \in R \wedge (b,a) \in R) \vee (a = b) \\ &\iff ((b,a) \in R \wedge (a,b) \in R) \vee (b = a) \\ &\iff (b,a) \in R_2 \end{aligned}$$

   Und damit ist gezeigt, dass R_2 eine Äquivalenzrelation.

3. R_3 ist keine Äquivalenzrelation. Ein Gegenbeispiel dazu ist:

$$\begin{aligned} & A = \{1,2\} \\ & \Rightarrow R = \{(1,2)\} \\ & \Rightarrow R_3 = \{(1,2),(2,1)\} \end{aligned}$$

4. Bleibt noch die Relation R_4, doch auch diese Relation ist keine Äquivalenzrelation. ihr fehlt die Transitivität. Ein Gegenbeispiel ist:

$$\begin{aligned} & A = \{1,2,3\} \\ & \Rightarrow R = \{(1,2),(3,2)\} \\ & \Rightarrow R_3 = \{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(1,1),(2,2),(3,3)\} \end{aligned}$$

1.4 Aufgabe 4

1.4.1 Aufgabenstellung

Sei $\{M_1, \circ_1\}$ein Monoid, $\{M_2, \circ_2\}$ eine algebraische Struktur und $h: M_1 \to M_2$ ein Homomorphismus. Beweisen Sie folgende Aussagen:

1. $\{h(M_1), \circ_2\}$ ist ein Monoid.
2. Die Relation $R \subseteq M_1 \times M_1$ enthalte $(a, b) \in R$ definitionsgemäß genau dann, wenn $h(a) = h(b)$ ist eine Kongruenzrelation, d.h. R ist Äquivalenzrelation und falls $(x, y) \in R$, dann gilt für alle $z, z' \in M_1$ auch $(z \circ_1 x \circ_1 z', z \circ_1 y \circ_1 z') \in R$.
3. Sei $[a]_R = \{b \in M_1 | \ (a, b) \in R\}$, $M_3 = \{[a]_R \,|\, a \in M_1\}$ die Menge alle Äquivalenzklassen bezüglich R und $\circ_3$ die Operation $[a] \circ_3 [b] = [a \circ_1 b]$. Dann ist $\circ_3$ wohldefiniert und $\{M_3, \circ_3\}$ isomorph zu $\{h(M_1), \circ_2\}$.

1.4.2 Lösung

Gegeben ist also zum einen ein Monoid $\{M_1, \circ_1\}$, eine algebraische Struktur $\{M_2, \circ_2\}$ undder Homomophismus $h: M_1 \to M_2$.

1. Um zu zeigen, dass $\{h(M_1), \circ_2\}$ ein Monoid ist. Sind 3 Sachen zu beweisen. Zum ersten muss gezeigt werden, dass $\{h(M_1), \circ_2\}$ eine algebraische Struktur ist, dass die Assoziativität gilt und schließlich, dass ein neutrales Element existiert. Zuerst zeige ich, dass $\{h(M_1), \circ_2\}$eine algebraische Struktur ist.
   Wir haben gegeben, dass für zwei Elemente $b_1, b_2 \in h(M_1)$ gilt:
   $$\exists a_1, a_2 \in M_1 \text{ mit } h(a_1) = b_1;\ h(a_2) = b_2$$
   Und damit folgt:
   $$\begin{aligned} b_1 \circ_2 b_2 &= h(a_1) \circ_2 h(a_2) \\ &= h(a_1 \circ_1 a_2) \end{aligned}$$
   Da nun aber $a_1 \circ_1 a_2 \in M_1$ist, gilt $h(a_1 \circ_1 a_2) \in h(M_1)$. Die *Assoziativität* folgt aus der *Surjektivität* des Homomorphismusses h und der *Assoziativität* von M_1. (Siehe auch Aufgabe 1).
   Bleibt noch die Existenz des neutralen Elements zu zeigen. Wir wissen, dass es ein neutrales Element $\epsilon_1 \in M_1$ gibt, so dass
   $$a_1 \circ_1 \epsilon_1 = \epsilon_1 \circ_1 a_1 = a_1, \forall a_1 \in M_1$$
   $h(e_1)$ ist nun das neutrale Element in $\{h(M_1), \circ_2\}$. Weiterhin sei $b \in h(M_1)$. Dann gibt es ein $a \in M_1$ mit $h(a) = b$.Und es gilt:
   $$\begin{aligned} a \circ_1 \epsilon_1 &= \epsilon_1 \circ_1 a = a \\ h(a) \circ_2 h(\epsilon_1) &= h(\epsilon_1) \circ_2 h(a) = h(a) \end{aligned}$$

2. Es gilt $R \subseteq M_1 \times M_1$ und wenn $(a,b) \in R$ sind, dann gilt auch $h(a) = h(b)$. Zu zeigen ist nun, dass R eine Kongruenzrelation ist. Dazu müssen wir zeigen, dass R eine Äquivalenzrelation ist, danach folgern wir, dass es eine Kongruenzrelation ist.
   Betrachten wir zuerst, ob R eine Äquivalenzrelation ist. Die *Reflexivität* ist geschenkt, und folgt durch zweimaliges Einsetzen eines Elementes $a \in M_1$. Die *Symmetrie* ergibt sich durch:

$$\begin{array}{rcl} (a,b) \in R & \Longleftrightarrow & h(a) = h(b) \\ & \Longleftrightarrow & h(b) = h(a) \\ & \Longleftrightarrow & (b,a) \in R \end{array}$$

   Bleibt noch die *Transitivität*. Sie folgt durch:

$$\begin{array}{rcl} (a,b) \in R,\, (b,c) \in R & \Longleftrightarrow & h(a) = h(b) \wedge h(b) = h(c) \\ & \Longleftrightarrow & h(a) = h(c) \\ & \Longleftrightarrow & (a,c) \in R \end{array}$$

   Und schließlich bleibt noch zu überprüfen, ob es sich nicht um eine *Kongruenzrelation* handelt. Sei nun $x \sim y$ und $z, z' \in M_1$ beliebig. Zu zeigen ist nun, dass $zxz' \sim zyz$ dazu:

$$\begin{array}{rcl} h(z \circ_1 x \circ_1 z') & = & h(z) \circ_2 h(x) \circ_2 h(z') \\ & = & h(z) \circ_2 h(y) \circ_2 h(z') \\ & = & h(z \circ_1 y \circ_1 z') \end{array}$$

   $\Rightarrow z \circ_1 x \circ_1 z' \sim z \circ_1 y \circ_1 z'$

3. Gegeben haben wir hier zum einen die $[a]_R = \{b \in M_1 |\ (a,b) \in R\}$ Menge der Äquivalenzklassen der Relation R, die algebraische Struktur $M_3 = \{[a]_R \mid a \in M_1\}$ und schließlich die Operation $\circ_3$ mit $[a] \circ_3 [b] = [a \circ_1 b]$. Um nun zu zeigen, dass die algebraische Struktur $\{M_3, \circ_3\}$ isomorph zu der Sruktur $\{h(M_1), \circ_2\}$ ist, zeigen wir zuerst, dass $\circ_3$ wohldefiniert ist.
   Wohldefiniert bedeutet, dass die Definition unabhängig von der Wahl der Repräsentanten ist. Es seien also $a_1, a_2, b_1, b_2 \in M_1$ mit $a_1 \sim_R a_2$ und $b_1 \sim_R b_2$dann gilt:

$$\begin{array}{rcl} [a_1] \circ_3 [b_1] & = & [a_1 \circ_1 b_1] \\ & = & [a_1 \circ_1 b_2] \\ & = & [a_2 \circ_1 b_2] \\ & = & [a_2] \circ_3 [b_2] \end{array}$$

   Nun bleibt noch die *Isomorphie* zu zeigen. Sprich zum einen *Injektivität* und zum anderen *Surjektivität*. Der Beweis erfolgt wie bei der ersten Aufgabe.