Nicole Kaiser fl Tutorium: Do. 12-14 Uhr fl Tutor: Martin Klossek

27.10.2001

Theoretische Informatik 1, WS 2001/2002

Übungsblatt 2

Die hier vorgestellten Lösungen sind nicht immer richtig.
Aufgabe 2.2

$f_4(n)=\Theta(n\log_5 n)$: Anwendung Satz 1.12

$a=5, b=5, f(n)=7n-1$ Gilt $f(n)=\Theta(n)$? Ja, denn $\lim_{n\to\infty}\frac{7n-1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{7}{1}=7$

(Anwendung Lemma 1.13, L'Hospital)
Also wächst $f_4(n)$ genauso stark wie $n\log_5 n$.

$$f_7(n)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$$

$f_8(n)=\Theta(n^2)$: Anwendung Satz 1.12

$a=9, b=3, f(n)=n\log_2 n$ Gilt $f(n)=O(n^{2-\varepsilon})$? Ja, denn

$n\log_2 n \le c\cdot n^2\cdot\frac{1}{n^\varepsilon} \Leftrightarrow \log_2 n \le c\cdot n\cdot\frac{1}{n^\varepsilon} \Rightarrow f_8(n)=\Theta(n^2)$ für $0<\varepsilon\le 0{,}1$

$f_8(n)$ wächst also genauso stark wie n^2 .

Wenn $g(n)$ asymptotisch stärker wächst als $f(n)$, dann sei $f(n)$ □ $g(n)$.

Behauptung:

$$f_7(n) \square f_3(n) \square f_4(n) \square f_8(n)=\Theta(f_5(n)) \square f_1(n) \square f_6(n) \square f_2(n)$$

Beweis:

Für alle c gilt: $c\ge 1$.

$f_7(n)$ □ $f_3(n)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_7(n)}{f_3(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{2n+3}=0 \quad\Leftrightarrow\quad f_7(n)=o(f_3(n)) \quad\Leftrightarrow\quad f_7(n)<c\cdot f_3(n)$$

$f_3(n)$ □ $f_4(n)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_3(n)}{n\log_5 n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{n\log_5 n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\log_5 n+\frac{n}{n\ln 5}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\log_5 n+\frac{1}{\ln 5}}=0$$

$$\Leftrightarrow\quad f_3(n)=o(n\log_5 n) \quad\Leftrightarrow\quad f_3(n)<c\cdot n\log_5 n$$

$f_4(n)$ □ $f_8(n)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\log_5 n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log_5 n}{n}=0 \quad\Leftrightarrow\quad n\log_5 n=o(n^2) \quad\Leftrightarrow\quad n\log_5 n<c\cdot n^2$$

$f_8(n) \square f_5(n)$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{4^{\log_2 n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad f_8(n) = \Theta(f_5(n)) \quad \Leftrightarrow \quad f_8(n)$ und $f_5(n)$ wachsen gleichstark.

$f_5(n) \square f_1(n)$

$\lim_{n\to\infty} \frac{f_5(n)}{f_1(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^{\log_2 n}}{4^n} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f_5(n) = o(f_1(n)) \quad \Leftrightarrow \quad f_5(n) < c \cdot f_1(n)$

$f_1(n) \square f_6(n)$

$\lim_{n\to\infty} \frac{f_1(n)}{f_6(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{27^n} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f_1(n) = o(f_6(n)) \quad \Leftrightarrow \quad f_1(n) < c \cdot f_6(n)$

$f_6(n) \square f_2(n)$

$\lim_{n\to\infty} \frac{f_6(n)}{f_2(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{27^n}{3^{3^n}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f_6(n) = o(f_2(n)) \quad \Leftrightarrow \quad f_6(n) < c \cdot f_2(n)$

Nach Lemma 1.17 wächst n asymptotisch schwächer als 3^n und für große n ist der konstante Wert der Basis nicht von Bedeutung.

„

Aufgabe 2.4

(a)

Sei $M(n)$ die Anzahl der Multiplikationen und $A(n)$ die Anzahl der Additionen. n ist Zweierpotenz. In der Schulmethode werden bei der Berechnung von r_{n-1} im Vergleich zu den anderen r_i, $0 \le i \le (2n-2)$ die meisten Additionen und Multiplikationen benötigt. $M(n)$ und $A(n)$ erreichen also bei r_{n-1} ihren höchsten Wert und fallen dann wieder ab.

Berechne also $M(n)$ nur bis r_{n-2}, verdopple diesen Wert und addiere $M(n)$ für r_{n-1} dazu.

$M(n) = 2 \cdot \sum_{i=0}^{n-2} (i+1) + n = 3 \cdot \sum_{i=0}^{n-2} i + 2 \cdot \sum_{i=0}^{n-2} 1 + n = n^2$ für $n = 2^k, \; k \le 1$

Für die Berechnung jedes r_i wird eine Addition weniger benötigt als Multiplikationen. $A(n)$ ergibt sich also aus der Anzahl von Multiplikationen minus $(2n-1)$ (Anzahl der r_i).

$A(n) = M(n) - (2n-1) = n^2 - 2n + 1$

(b)

Für die Multiplikation von Polynomen mit Grad n werden 4 Multiplikationen benötigt. Multiplikationen mit x-Potenzen werden nicht mitgezählt. Für die Multiplikation von Polynomen mit Grad $\frac{n}{2}$ werden 4^2 Multiplikationen benötigt usw.

Wenn man sich aus diesen Vorgaben den Rekursionsbaum aufbaut, ergibt sich folgende Rekursionsgleichung:

$M(n) = 4M(\frac{n}{2}) + n$

Lösung dieser Gleichung mit dem Mastertheorem:

$a=4 \;,\; b=2 \;,\; f(n)=n$

$M(n)=\Theta(n^2)$, weil $f(n)=O(n^{2-\varepsilon}) \quad \Leftrightarrow \quad n \leq c \cdot n^2 \cdot \frac{1}{n^{\varepsilon}}$ für $0<\varepsilon \leq 1$ und $c \geq 1$

Für die Multiplikation von Polynomen mit Grad n werden 3 Additionen benötigt. Analog zu $M(n)$ lässt sich die Rekursionsgleichung für $A(n)$ aufstellen.

$A(n)=3\,A(\frac{n}{2})+n$

Lösung mit dem Mastertheorem:

$a=3 \;,\; b=2 \;,\; f(n)=n$

$A(n)=\Theta(n^2)$, weil $f(n)=O(n^{\log_2 3-\varepsilon}) \quad \Leftrightarrow \quad n \leq c \cdot n^{\log_2 3} \cdot \frac{1}{n^{\varepsilon}}$ für $c \geq 1$ und $0<\varepsilon \leq 0{,}5$, weil $\log_2 3>1{,}5$