

27.10.2001

Theoretische Informatik 1, WS 2001/2002**Übungsblatt 2***Die hier vorgestellten Lösungen sind nicht immer richtig.***Aufgabe 2.2** $f_4(n) = \Theta(n \log_5 n)$: Anwendung Satz 1.12 $a=5, b=5, f(n)=7n-1$ Gilt $f(n) = \Theta(n)$? Ja, denn $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n-1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{1} = 7$

(Anwendung Lemma 1.13, L'Hospital)

Also wächst $f_4(n)$ genauso stark wie $n \log_5 n$.

$$f_7(n) = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

 $f_8(n) = \Theta(n^2)$: Anwendung Satz 1.12 $a=9, b=3, f(n) = n \log_2 n$ Gilt $f(n) = O(n^{2-\varepsilon})$? Ja, denn

$$n \log_2 n \leq c \cdot n^2 \cdot \frac{1}{n^\varepsilon} \Leftrightarrow \log_2 n \leq c \cdot \frac{1}{n^\varepsilon} \Rightarrow f_8(n) = \Theta(n^2) \text{ für } 0 < \varepsilon \leq 0,1$$

 $f_8(n)$ wächst also genauso stark wie n^2 .Wenn $g(n)$ asymptotisch stärker wächst als $f(n)$, dann sei $f(n) \square g(n)$.**Behauptung:**

$$f_7(n) \square f_3(n) \square f_4(n) \square f_8(n) = \Theta(f_5(n)) \square f_1(n) \square f_6(n) \square f_2(n)$$

Beweis:Für alle c gilt: $c \geq 1$.

$$f_7(n) \square f_3(n)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_7(n)}{f_3(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{2n+3} = 0 \Leftrightarrow f_7(n) = o(f_3(n)) \Leftrightarrow f_7(n) < c \cdot f_3(n)$$

$$f_3(n) \square f_4(n)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_3(n)}{n \log_5 n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{n \log_5 n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\log_5 n + \frac{n}{n \ln 5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\log_5 n + \frac{1}{\ln 5}} = 0$$

$$\Leftrightarrow f_3(n) = o(n \log_5 n) \Leftrightarrow f_3(n) < c \cdot n \log_5 n$$

$$f_4(n) \square f_8(n)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log_5 n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_5 n}{n} = 0 \Leftrightarrow n \log_5 n = o(n^2) \Leftrightarrow n \log_5 n < c \cdot n^2$$

$$f_8(n) \square f_5(n)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{4^{\log_2 n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2} = 1 \Leftrightarrow f_8(n) = \Theta(f_5(n)) \Leftrightarrow f_8(n) \text{ und } f_5(n) \text{ wachsen gleichstark.}$$

$$f_5(n) \square f_1(n)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_5(n)}{f_1(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{\log_2 n}}{4^n} = 0 \Leftrightarrow f_5(n) = o(f_1(n)) \Leftrightarrow f_5(n) < c \cdot f_1(n)$$

$$f_1(n) \square f_6(n)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_1(n)}{f_6(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{27^n} = 0 \Leftrightarrow f_1(n) = o(f_6(n)) \Leftrightarrow f_1(n) < c \cdot f_6(n)$$

$$f_6(n) \square f_2(n)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_6(n)}{f_2(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{27^n}{3^{3^n}} = 0 \Leftrightarrow f_6(n) = o(f_2(n)) \Leftrightarrow f_6(n) < c \cdot f_2(n)$$

Nach Lemma 1.17 wächst n asymptotisch schwächer als 3^n und für große n ist der konstante Wert der Basis nicht von Bedeutung.

..

Aufgabe 2.4

(a)

Sei $M(n)$ die Anzahl der Multiplikationen und $A(n)$ die Anzahl der Additionen. n ist Zweierpotenz. In der Schulmethode werden bei der Berechnung von r_{n-1} im Vergleich zu den anderen

$r_i, 0 \leq i \leq (2n-2)$ die meisten Additionen und Multiplikationen benötigt. $M(n)$ und $A(n)$ erreichen also bei r_{n-1} ihren höchsten Wert und fallen dann wieder ab.

Berechne also $M(n)$ nur bis r_{n-2} , verdopple diesen Wert und addiere $M(n)$ für r_{n-1} dazu.

$$M(n) = 2 \cdot \sum_{i=0}^{n-2} (i+1) + n = 3 \cdot \sum_{i=0}^{n-2} i + 2 \cdot \sum_{i=0}^{n-2} 1 + n = n^2 \text{ für } n=2^k, k \leq 1$$

Für die Berechnung jedes r_i wird eine Addition weniger benötigt als Multiplikationen. $A(n)$ ergibt sich also aus der Anzahl von Multiplikationen minus $(2n-1)$ (Anzahl der r_i).

$$A(n) = M(n) - (2n-1) = n^2 - 2n + 1$$

(b)

Für die Multiplikation von Polynomen mit Grad n werden 4 Multiplikationen benötigt. Multiplikationen mit x -

Potenzen werden nicht mitgezählt. Für die Multiplikation von Polynomen mit Grad $\frac{n}{2}$ werden 4^2

Multiplikationen benötigt usw.

Wenn man sich aus diesen Vorgaben den Rekursionsbaum aufbaut, ergibt sich folgende Rekursionsgleichung:

$$M(n) = 4M\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

Lösung dieser Gleichung mit dem Mastertheorem:

$$a=4, \quad b=2, \quad f(n)=n$$

$$M(n)=\Theta(n^2), \quad \text{weil } f(n)=O(n^{2-\varepsilon}) \Leftrightarrow n \leq c \cdot n^2 \cdot \frac{1}{n^\varepsilon} \text{ für } 0 < \varepsilon \leq 1 \text{ und } c \geq 1$$

Für die Multiplikation von Polynomen mit Grad n werden 3 Additionen benötigt. Analog zu $M(n)$ lässt sich die Rekursionsgleichung für $A(n)$ aufstellen.

$$A(n) = 3A\left(\frac{n}{2}\right) + n$$

Lösung mit dem Mastertheorem:

$$a=3, \quad b=2, \quad f(n)=n$$

$$A(n) = \Theta(n^2), \quad \text{weil } f(n) = O(n^{\log_2 3 - \varepsilon}) \Leftrightarrow n \leq c \cdot n^{\log_2 3} \cdot \frac{1}{n^\varepsilon} \text{ für } c \geq 1 \text{ und } 0 < \varepsilon \leq 0,5, \text{ weil } \log_2 3 > 1,5$$