Nicole Kaiser fl Tutorium: Do. 12-14 Uhr fl Tutor: Martin Klossek

24.10.2001

Theoretische Informatik 1, WS 2001/2002

Übungsblatt 1

Die hier vorgestellten Lösungen sind nicht immer richtig.

Aufgabe 1.1

a)
Behauptung: siehe Aufgabenstellung

Beweis durch Induktion.
Um ein Polygon zu konstruieren werden mindestens $n=3$ Eckpunkte benötigt.

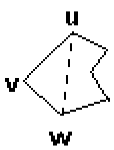
I.V.: $n=3$

Ist ein Dreieck. Ein Dreieck kann man durch die in der Aufgabenstellung vorgestellte Vorgehensweise nicht triangulieren. D.h. es lässt sich durch $n-3=3-3=0$ Diagonalen triangulieren. Dabei entstehen $n-2=3-2=1$ Dreiecke.

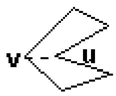
I.S.: $n \rightarrow n+1$

Die Behauptung gelte für $\leqslant n$ Ecken.
Wenn in ein Polygon mit $n+1$ Ecken eine Diagonale eingefügt wird, entstehen zwei Polygone mit jeweils $\leqslant n$ Ecken. Für die beiden neu entstandenen Polygone kann nun die Behauptung angewendet werden.

Einfügen der Diagonalen:
Sei die am weitesten links liegende Ecke eines Polygons v. Deren beiden Nachbarn seien u und w. Man verbinde u und w. Dadurch entstehen zwei Polygone.
Beispiel:



Wenn das nicht geht, weil die Diagonale außerhalb des Polynoms verläuft, verbinde man v mit der Ecke die v am nächsten liegt. In diesem Fall u.
Beispiel:



b)
Ein Polygon wird eindeutig zerlegt, wenn es für jeden Eckpunkt höchstens einen Punkt gibt, zu dem eine Diagnonale gezogen werden könnte.
Beispiel:

Aufgabe 1.2

Jedes Element aus U wird mit Wahrscheinlichkeit $p_A=\frac{1}{n}$ in A aufgenommen und mit Wahrscheinlichkeit $p_B=\frac{1}{n}$ in B aufgenommen. Die Elemente werden unabhängig von einander gezogen. In der Menge A befinden sich $\sum_{i=1}^{k} a_i = a$ und in der Menge B $\sum_{j=1}^{l} b_j = b$ Elemente, $k, l \leq n$.

a)

$$E(|A \cap B|) = E(|A|) \cap E(|B|)$$
$$= \sum_{a_i \in A} a_i \cdot q_A \cdot \sum_{b_j \in B} b_j \cdot q_B = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{a_i \in A} a_i \cdot \sum_{b_j \in B} b_j \right\}$$

b)

$$E(|A \cup B|) = E(|A|) \cup E(|B|)$$
$$= \sum_{a_i \in A} a_i \cdot q_A + \sum_{b_j \in B} b_j \cdot q_B$$
$$= \frac{1}{n} \left\{ \sum_{a_i \in A} a_i + \sum_{b_j \in B} b_j \right\} = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{a_i \in A,\ b_j \in B} a_i + b_j \right.$$

Aufgabe 1.3

a)
Wenn man sich die Ausgaben des Programms betrachtet, fällt eine gewisse Regelmäßigkeit auf.

Eingabe n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Ausgabe $f(n) = m$	1	2	4	4	8	8	8	8	16	16	16	16	16	16	16	16	32	32

Aus diesen Werten ergibt sich folgende Funktion für m:

$$m := f(n) = 2 \cdot f\left(\left[\frac{n}{2}\right]\right).$$

b)
Die Struktur der geschachtelten for-Schleifen wird durch entsprechend geschachtelte Summen wiedergegeben:

$$f(n) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{2i} \sum_{k=1}^{j} 1$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{2i} (j-1+1) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{2i} j$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=1}^{2i} j - \sum_{j=1}^{i-1} j \right)$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{2i} j - \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} j$$
$$= \sum_{i=0}^{n} (2i^2 + i) - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} (i^2 - i)$$
$$= 2 \sum_{i=0}^{n} i^2 + \sum_{i=0}^{n} i - \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} i^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} i$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{n(n+1)}{2}(2n+1)+\frac{n(n+1)}{2}-\frac{1}{6}\cdot\frac{n(n+1)}{2}(2n+1)+\frac{1}{2}\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{2}{3}(2n+1)+1-\frac{1}{6}(2n+1)-\frac{1}{2}\right]$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{4}{3}n+\frac{2}{3}+1-\frac{1}{3}n-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right]$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}[n+2]$$

$$=\frac{1}{2}n^3+\frac{3}{2}n^2+n$$

Folglich gilt für m: $m:=f(n)=\frac{1}{2}n^3+\frac{3}{2}n^2+n$.