Theoretische Informatik 1

Gruppe 5 (Maik Weinard)

2. Übungsblatt

Adam Duck

31. Oktober 2001

2.1 Fixpunktsuche keine Wertung
Wir haben ein Array A dessen Felder von 0 bis $n-1$ indiziert sind. Die Einträge sind ganze, nicht notwendigerweise positive, Zahlen, wobei für $0 \leq i \leq n-2$ gilt: $A[i] < A[i+1]$. Ein Beispiel:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A[i]	-9	-6	-4	-2	-1	0	2	3	5	8	9	12	14	16	19	21	22

Wir möchten wissen, ob es ein Element i mit $i = A[i]$ gibt. Falls ja, soll das Element auch ausgegeben werden. Im obigen Beispiel existiert ein solches Element nicht. **Entwerfe** einen Algorithmus, der in möglichst schneller asymptotischer Zeit diese Frage beantwortet. $\mathcal{O}(\log(n))$ ist dabei möglich. Eine Beschreibung in Pseudo-Code genügt. Allerdings soll die Beschreibung so strukturiert und exakt sein, dass jeder anhand dieser Beschreibung den Algorithmus in seiner Lieblingsprogrammiersprache implementieren kann.

2.2 Funktionen Ranking
Ordne die folgenden Funktionen nach ihrem asymptotischen Wachstum, beginnend mit der langsamst wachsenden. Beweise deine Aussagen. Die Aussagen sollen jeweils so scharf wie möglich sein. Gilt also $f(n) = o(g(n))$ oder $f(n) = \Theta(g(n))$, so soll nicht nur $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$ gezeigt werden. Es ist also möglich, dass Funktionen gleiches asymptotisches Wachstum zeigen.

$$
\begin{array}{lll|lll}
f_1(n) & = & 4^n & f_5(n) & = & 4^{\log_2 n} \\
f_2(n) & = & 3^{(3^n)} & f_6(n) & = & (3^3)^n \\
f_3(n) & = & 2n+3 & f_4(n) & = & \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1 \\ 5 \cdot f_4\left(\frac{n}{5}\right) + 7n - 1 & \text{sonst} \end{cases} \\
f_7(n) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k & f_8(n) & = & \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1 \\ 9 \cdot f_8\left(\frac{n}{3}\right) + n \cdot \log_2(n) & \text{sonst} \end{cases}
\end{array}
$$

(12 Punkte)

Lösung:
Zuerstmal sollten wir einige Funktionen auf eine bessere Form bringen.

$$f_4(n) = 4^{\log_2(n)} = \left(2^{\log_2(n)}\right)^2 = n^2$$

$$f_7(n) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = -2\left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)} + 2$$

$f_4(n)$ und $f_8(n)$ müssen wir mit dem Master-Theorem lösen.

$\mathbf{f_4(n)}$: $a = 5,\ b = 5,\ f(n) = 7n - 1$
Damit folgt mit dem Master-Theorem

$$7n - 1 = \Theta\left(n^{\log_5(5)}\right) = \Theta(n)$$

und somit

$$f_4(n) = \Theta(n \log_5(n))$$

$\mathbf{f_8(n)}$: $a = 9,\ b = 3,\ f(n) = n \cdot \log_2(n)$

$$n \log_2(n) = \mathcal{O}\left(n^{\log_3(9) - \varepsilon}\right) = \mathcal{O}\left(n^{2-\varepsilon}\right)$$

Daraus folgt

$$f_8(n) = \Theta\left(n^2\right)$$

Nun können wir uns an die eigentliche Aufgabe machen.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_7(n)}{f_3(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{-2\left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)} + 2}{2n + 3} = 0$$

Denn der Zähler bewegt sich gegen 2 ($(1/2)^{(n+1)} \to 0$) und der Nenner gegen ∞. Somit ergibt sich:

$$f_7 = o(f_3)$$

Nächster Vergleich.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_3(n)}{f_4(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n + 3}{c \cdot n \log_5(n)} \overset{\text{de l'H}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{2\ln(5)}{c\ln(n) + c} = 0$$

In die Gesamtlösung eingefügt:

$$f_7 = o(f_3) = o(f_4)$$

Und weiter.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_4(n)}{f_8(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{c_1 \cdot \log_5(n)}{c_2 \cdot n^2} \overset{\text{de l'H}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{c_1 \ln(n) + c_1}{2\ln(5)c_2 \cdot n} \overset{\text{de l'H}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{c_1}{2\ln(5)c_2 \cdot n} = 0$$

Wieder in die Gesamtlösung einfügen:

$$f_7 = o(f_3) = o(f_4) = o(f_8)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_8(n)}{f_5(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{c_2 n^2}{n^2} = c_2$$

Somit ist

$$f_7 = o(f_3) = o(f_4) = o(f_8) = \Theta(f_5)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_5(n)}{f_1(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{4^n} \overset{\text{de l'H}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{4^n\ln(4)} \overset{\text{de l'H}}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{2}{4^n\ln(4)^2} = 0$$

In der Gesamtlösung:

$$f_7 = o(f_3) = o(f_4) = o(f_8) = \Theta(f_5) = o(f_1)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_1(n)}{f_6(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{27^n}$$

Wir könnten hier deir Regel von *de l'Hopital* ad ultimo anwenden und würden trotzdem zu keinem Ergebnis kommen. Aber was gilt, ist $f_6(n) = \Theta(c^n)$. Jedoch bekommen wir mit $c \cdot f_1(n)$ keine Funktion, die annähernd so start wächst wie $f_6(n)$. Damit gilt:

$$f_7 = o(f_3) = o(f_4) = o(f_8) = \Theta(f_5) = o(f_1) = o(f_6)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_2(n)}{f_6(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{3^{(3^n)}}{(3^3)^n}$$

$$f_7 = o(f_3) = o(f_4) = o(f_8) = \Theta(f_5) = o(f_1) = o(f_6) = o(f_2)$$

2.3 Asymptotische Notation keine Wertung

(a) Zeige $f_1 = \mathcal{O}(g_1) \wedge f_2 = \mathcal{O}(g_2) \to f_1 + f_2 = \mathcal{O}(g_1 + g_2) \wedge f_1 \cdot f_2 = \mathcal{O}(g_1 \cdot g_2)$

(b) Bleibt die Aussage in (a) richtig, wenn stets $\mathcal{O}$ durch o oder Θ ersetzt wird?

(c) Ist stets $f(2n) = \Theta(f(n))$?

2.4 Polynommultiplikation 12 (3+3+6 Wertungspunkte) Wir wollen die Anzahl der Multiplikationen und Additionen von Zahlen, bei der Polynommultiplikation untersuchen. Dazu betrachten wir 2 Polynome p und q vom Grad $n-1$ mit

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n-1} p_k x^k \quad \text{und} \quad q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} q_k x^k$$

Wir nehmen an, n sei eine Zweierpotenz.

(a) Geht man nach Schulmethode vor, so multipliziert man alle Paare von p und q Koeffizienten und fasst Ergebnisse mit gleicher Indexsumme zusammen. Wenn $r(x) = \sum_{k=0}^{2n-2} r_k x^k$ das Ergebnispolynom ist, berechnet man:

$$\begin{aligned}
r_0 &= p_0 \cdot q_0 \\
r_1 &= p_0 \cdot q_1 + p_1 \cdot q_0 \\
r_2 &= p_0 \cdot q_2 + p_1 \cdot q_1 + p_2 \cdot q_0 \\
&\vdots \\
r_{n-1} &= p_0 \cdot q_{n-1} + \ldots + p_{n-1} \cdot q_0 \\
&\vdots \\
r_{2n-2} &= p_{n-1} \cdot q_{n-1}
\end{aligned}$$

Wieviele Additionen und Multiplikationen fallen bei dieser Methode an?(3 Punkte)■
Lösung:
Man sollte sehen, dass r_{n-1} ein Wendepunkt ist: hier ist die Anzahl der Additionen und Multiplikationen am größten. Nach oben und nach unten fallen diese linear

ab. Wenn wir nun als zweites sehen, dass die Anzahl der Additionen gleich dem Index von r ist und die Anzahl der Multiplikationen gleich dem vom Index + 1, können wir die Formeln hinschreiben:

$$\begin{aligned}
\#_A &= \sum_{i=0}^{n-2} i + (n-1) \\
&= \frac{(n-2)(n-1)}{2} + n \\
&= \frac{n^2 - n - 2n + 2}{2} + \frac{2n}{2} \\
&= \frac{n^2 - n + 2}{2}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\#_M &= \sum_{i=0}^{n-2} (i+1) + n \\
&= \frac{(n-2)(n-1)}{2} + (n-1) + n \\
&= \frac{n^2 - 3n + 2}{2} + \frac{4n-2}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

(b) Wir wollen das Verfahren verbessern. Oft kann ein Vorteil gewonnen werden, wenn man ein Problem in kleinere Instanzen desselben Problems zerlegt (Divide & Conquer). Wir verfolgen diesen Ansatz auch hier und zerlegen p wie folgt.

$$\begin{aligned}
p(x) &= \overline{p}(x) \cdot x^{n/2} + \underline{p}(x) \\
\overline{p}(x) &= \sum_{k=0}^{n/2-1} p_{k+n/2} \cdot x^k \\
\underline{p}(x) &= \sum_{k=0}^{n/2-1} p_k \cdot x^k
\end{aligned}$$

Mit q verfahren wir genauso. So erhalten wir 4 Polynome $\overline{p}(x), \underline{p}(x), \overline{q}(x), \underline{q}(x)$ vom Grade $n/2 - 1$. Wir multiplizieren nun

$$p(x) \cdot q(x) = \overline{p}(x) \cdot \underline{q}(x) \cdot x^n + \overline{p}(x) \cdot q(x) \cdot x_{n/2} + \underline{p}(x) \cdot \overline{q}(x) \cdot x^{n/2} + \underline{p}(x) \cdot \underline{q}(x)$$

Die Multiplikationen von Polynomen mit x-Potenzen sind leicht, da nur die Exponenten entsprechend erhöht werden müssen. Wir zählen sie daher nicht mit. **Gib** je eine Rekursionsgleichung für die Zahl der Multiplikationen in diesem Schema und für die Zahl der Additionen in diesem Schema **an** und **löse** sie.

(c) In einer Variante des Ansatzes berechnen wir nun rekursiv die Ergebnisse der folgenden drei Polynommultiplikationen für Polynome vom Grad $n/2 - 1$:

$$\overline{p}(x) \cdot \overline{q}(x),\ \underline{p}(x) \cdot \underline{q}(x) \quad \text{und} \quad \big(\overline{p}(x) + \underline{p}(x)\big) \cdot \big(\overline{q}(x) + \underline{q}(x)\big)$$

Beschreibe, wie sich aus den ermittelten Ergebnissen das Gesamtergebnis zusammensetzen lässt. **Gib** je eine Rekursionsgleichung für die Zahl der Multiplikationen in diesem Schema und die Zahl der Additionen in diesem Schema **an** und **löse** sie.

Hinweis: Subtraktionen gelten im Kontext dieser Aufgabe als Additionen.