Formelsammlung zur Vorlesung Formale Sprachen / Automatentheorie

Tobias Radloff

20. Februar 2002

Zusammenfassung

Diese Formelsammlung enthält sämtliche Definitionen, Sätze, Lemmata und Corollare aus dem Wotschke-Skript zur gleichnamigen Vorlesung, jedoch keine Beweise und Bemerkungen.

1 Einführung in die AFL-Theorie

1.1 a-Transducer, AFLs und Semi-AFLs

Definition 1.1.1 (AFLs) *Eine* AFL (Abstract Family of Languages) *ist eine Familie von Sprachen, die mindestens eine nichtleere Sprache enthält und unter Vereinigung, Konkatenation, Kleene +, nichtlöschendem Homomorphismus, inversem Homomorphismus und Schnitt mit regulären Mengen abgeschlossen ist.*

Eine volle AFL *ist eine AFL, die unter Homomorphismus abgeschlossen ist.*

Definition 1.1.2 *Sei $\mathcal{L}$ eine Familie von Sprachen. Dann ist $\mathcal{F}(\mathcal{L})$ die* kleinste AFL*, die $\mathcal{L}$ enthält, und $\hat{\mathcal{F}}(\mathcal{L})$ die* kleinste volle AFL*, die $\mathcal{L}$ enthält.*

Definition 1.1.3 *Wenn es eine Sprache L mit $\mathcal{L} = \mathcal{F}(L)$ gibt, dann ist $\mathcal{L}$ eine* principal AFL *und L heißt* Generator von $\mathcal{L}$.

Wenn $\mathcal{L} = \hat{\mathcal{F}}(L)$, dann ist $\mathcal{L}$ eine full principal AFL *und L heißt* voller Generator von $\mathcal{L}$.

Definition 1.1.4 [1]

Seien $\mathcal{R}_0$ die Familie der ϵ-freien regulären Mengen und $\mathcal{R}$ die der regulären Mengen. Dann gilt:

- *$\mathcal{R}_0$ ist eine principal AFL, die durch eine ϵ-freie reguläre Menge erzeugt wird;*
- *$\mathcal{R}$ ist eine principal AFL, die durch eine reguläre Menge erzeugt wird, die ϵ enthält;*

[1] Anmerkung: Dies sind keine Definitionen im strengen Sinne, sondern Sätze bzw. Lemmata, deren Beweise im Skript nicht erbracht wird.

- *$\mathcal{R}$ ist eine volle principal AFL;*
- *jede reguläre Menge ist ein voller Generator von $\mathcal{R}$.*

Definition 1.1.5 (Substitution) *Sei $\tau(a)$, $a \in \Sigma$ eine Sprache und $L \subset \Sigma_1^*$. Dann wird $\tau(L)$ aus L wie folgt gebildet:*

$$\begin{aligned} \tau(\epsilon) &= \{\epsilon\} \\ \tau(\{a_1 \dots a_n\}) &= \tau(a_1) \dots \tau(a_n) \text{ für } a_1, \dots, a_n \in \Sigma_1 \\ \tau(L) &= \bigcup_{w \in L} \tau(\{w\}) \text{ für } L \subseteq \Sigma_1^* \end{aligned}$$

- *τ ist eine* Substitution.
- *$\tau(L)$ ist eine* Substitution in L.
- *Falls kein $\tau(a)$ das leere Wort ϵ enthält, ist eine τ eine* ϵ-freie Substitution.
- *Falls $\tau(a) \in \mathcal{L}$* für alle a, *ist τ eine* $\mathcal{L}$-Substitution.

Für zwei Sprachfamilien $\mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_2$ gilt:

- $\mathcal{L}_1 \, \sigma \, \mathcal{L}_2 = \{\tau(L) \mid L \in \mathcal{L}_1,\ \tau$ *ist eine* ϵ-freie $\mathcal{L}_2$-Substitution$\}$
- $\mathcal{L}_1 \, \hat{\sigma} \, \mathcal{L}_2 = \{\tau(L) \mid L \in \mathcal{L}_1,\ \tau$ ist eine $\mathcal{L}_2$-Substitution$\}$

Für eine Sprachfamilie $\mathcal{L}$ gilt:

- *$\mathcal{L}$ ist abgeschlossen unter Substitution durch $\mathcal{L}_2$ in $\mathcal{L}_1$ falls $\mathcal{L}_1 \, \hat{\sigma} \, \mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}$;*
- *$\mathcal{L}$ ist abgeschlossen unter ϵ-freier Substitution durch $\mathcal{L}_2$ in $\mathcal{L}_1$ falls $\mathcal{L}_1 \, \sigma \, \mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}$;*
- *$\mathcal{L}$ ist abgeschlossen unter Substitution durch $\mathcal{L}_1$ falls $\mathcal{L} \, \hat{\sigma} \, \mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}$;*
- *$\mathcal{L}$ ist abgeschlossen unter ϵ-freier Substitution durch $\mathcal{L}_1$ falls $\mathcal{L} \, \sigma \, \mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}$;*
- *$\mathcal{L}$ ist abgeschlossen unter Substitution durch $\mathcal{L}_1$ falls $\mathcal{L}$ abgeschlossen ist unter Substitution von $\mathcal{L}_1$ in $\mathcal{L}$;*
- *$\mathcal{L}$ ist abgeschlossen unter ϵ-freier Substitution durch $\mathcal{L}_1$ falls $\mathcal{L}$ abgeschlossen ist unter ϵ-freier Substitution von $\mathcal{L}_1$ in $\mathcal{L}$;*
- *$\mathcal{L}$ ist abgeschlossen unter Substitution falls $\mathcal{L} \, \hat{\sigma} \, \mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}$;*
- *$\mathcal{L}$ ist abgeschlossen unter ϵ-freier Substitution falls $\mathcal{L} \, \sigma \, \mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}$;*

Corollar 1 *$\mathcal{R}_0$ ist unter ϵ-freier Substitution abgeschlossen. $\mathcal{R}$ und $\mathcal{C}$ sind unter Substitution abgeschlossen.*

Satz 1.1.1 (Substitution von AFLs in $\mathcal{R}$)

- *Jede AFL ist unter Substitutition in ϵ-freie reguläre Mengen abgeschlossen;*

- *jede AFL, die $\{\epsilon\}$ enthält, ist unter Substitutition in reguläre Mengen abgeschlossen.*
- *Für eine ϵ-freie AFL $\mathcal{L}$ gilt:* $\mathcal{L} = \mathcal{R}_0 \,\hat{\sigma}\, \mathcal{L} = \mathcal{R}_0 \,\sigma\, \mathcal{L}$
- *Für eine AFL $\mathcal{L}$, die $\{\epsilon\}$ enthält, gilt:* $\mathcal{L} = \mathcal{R}_0 \,\hat{\sigma}\, \mathcal{L} = \mathcal{R} \,\hat{\sigma}\, \mathcal{L} = \mathcal{R} \,\sigma\, \mathcal{L}$

Corollar 2 *Jede AFL enthält alle ϵ-freien Mengen; jede AFL, die $\{\epsilon\}$ enthält, enthält alle regulären Mengen.*

Definition 1.1.6 (a-Transducer) *Ein a-*Transducer *ist ein* 6*-Tupel*

$$M = (K, \Sigma_1, \Delta, H, q_0, F)$$

mit folgenden Elementen:

- *K ist eine endliche Zustandsmenge, $q_0 \in K$, $F \subseteq K$*
- *Σ_1 ist ein endliches Eingabealphabet*
- *Δ ist ein endliches Ausgabealphabet*
- *H ist eine endliche Teilmenge von $K \times \Sigma_1^* \times \Delta^* \times K$*

Die Funktion γ_M von $K \times \Sigma_1^* \times K$ in die Teilmengen von Δ^* sei mit M wie folgt assoziiert:

$$\begin{aligned}
\gamma_M(q, w, q') &= \{x_1 \ldots x_n \mid \exists (q_i, w_i, x_i, q_{i+1}) \in H, \\
&\qquad 1 \le i \le n, q_1 = q, q_{n+1} = q', w = w_1 \ldots w_n\} \\
M(\epsilon) &= \bigcup_{f \in F} \gamma_M(q_0, \epsilon, f) \cup \{\epsilon \mid q_0 \in F\} \\
M(w) &= \bigcup_{f \in F} \gamma_M(q_0, w, f) \text{ für } w \ne \epsilon
\end{aligned}$$

Für eine Sprache L seien

$$\begin{aligned}
M(L) &= \bigcup_{w \in L} M(w) \\
M^{-1}(L) &= \{w \mid M(w) \cap L \ne \emptyset\}
\end{aligned}$$

Definition 1.1.7 *Sei $M = (K, \Sigma_1, \Delta, H, q_0, F)$ ein a-Transducer.*

- *M ist* ϵ-ausgabefrei *falls $H \subseteq K \times \Sigma_1^* \times \Delta^+ \times K$*
- *M ist* ϵ-eingabefrei *falls $H \subseteq K \times \Sigma_1^+ \times \Delta^* \times K$*
- *M ist* 1-bounded *falls $H \subseteq K \times (\Sigma_1 \cap \{\epsilon\}) \times (\Delta \cap \{\epsilon\}) \times K$*

- *M ist* ϵ-ausgabebegrenzt *falls ein* $k \geq 0$ *existiert, so daß* $\epsilon \notin \gamma_M(q, w, q')$ *für* $|w| > k$

- *M ist* ϵ-eingabebegrenzt *falls ein* $k \geq 0$ *existiert, so daß* $w \in \gamma_M(q, e, q') \Rightarrow |w| \leq k$

Lemma 1.1.1 *Für einen a-Transducer M gibt es einen a-Transducer $\bar{M}$ mit $M(w) = \bar{M}^{-1}(w)$ und $\bar{M}(w) = M^{-1}(w)$ für alle w; weiterhin ist $\bar{M}$ ϵ-aus(ein)-gabebegrenzt (frei) genau dann, wenn M ϵ-ein(aus)gabebe grenzt(frei) ist, und $\bar{M}$ ist 1-bounded falls M 1-bounded ist.*

Lemma 1.1.2 *Wenn M ein ϵ-aus(ein)gabebegrenzter a-Transducer ist, existiert ein ϵ-aus(ein)gabefreier a-Transducer $\bar{M}$ mit $M(w) \setminus \{\epsilon\} = \bar{M}(w) \setminus \{\epsilon\}$ für alle $w \neq \epsilon$.*

Lemma 1.1.3 *Sei M ein a-Transducer. Dann existiert ein a-Transducer $\bar{M}$, so daß überall $M(w) = \bar{M}(w)$ gilt, $\bar{M}$ 1-bounded ist und $\bar{M}$ ϵ-aus(ein)gabebegrenzt ist, falls M ϵ- aus(ein)gabebegrenzt ist.*

Lemma 1.1.4 *Seien M_1 und M_2 a-Transducer. Es existiert ein a- Transducer M_3 mit $M_3(w) = M_2(M_1(w))$ für alle w; M_3 ist ϵ-aus(ein)gabefrei falls M_1 und M_2 beide ϵ-aus(ein)gabefrei sind.*

Definition 1.1.8 (Semi-AFLs) *Eine* Semi-AFL (auch: Trio) *ist eine Sprachfamilie, die mindestens eine nichtleere Sprache enthält und unter nichtlöschendem Homomorphismus, inversem Homomorphismus und Schnitt mit regulären Mengen abgeschlossen ist.*

Eine volle Semi-AFL *ist eine unter Homomorphismus abgeschlossene Semi-AFL.*

Satz 1.1.2 (Semi-AFLs und a-Transducer) *Eine nichttriviale Familie von Sprachen ist unter Abbildung durch einen a-Transducer genau dann abgeschlossen, wenn sie eine volle Semi-AFL ist.*

Eine nichttriviale Familie von Sprachen ist unter Abbildung durch einen ϵ-ausgabefreien a-Transducer genau dann abgeschlossen, wenn sie eine Semi-AFL ist.

Corollar 3 *Jede AFL ist unter Abbildung durch einen ϵ-ausgabefreien a-Transducer abgeschlossen; jede volle AFL ist unter Abbildung durch einen a-Transducer abgeschlossen.*

Corollar 4 *Wenn R regulär und M ein a-Transducer ist, ist $M(R)$ regulär.*

Corollar 5 *Wenn L kontextfrei und M ein a-Transducer ist, ist $M(L)$ kontextfrei.*

Definition 1.1.9 *Für eine nichttriviale Sprachfamilie $\mathcal{L}$ ist*

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(\mathcal{L}) &= \{M(L) \mid L \in \mathcal{L},\ M \text{ ist ein } \epsilon \text{ - ausgabefreier } a\text{-Transducer}\} \\
\hat{\mathcal{M}}(\mathcal{L}) &= \{M(L) \mid L \in \mathcal{L},\ M \text{ ist ein } a\text{- Transducer}\}
\end{aligned}$$

Satz 1.1.3 *Sei $\mathcal{L}$ eine nichttriviale Sprachklasse.*

1. *Die folgenden Aussagen für eine Sprachklasse $\mathcal{L}_1$ sind äquivalent:*
   (a) *$\mathcal{L}_1$ ist die kleinste Semi-AFL, die $\mathcal{L}$ enthält.*
   (b) *$\mathcal{L}_1$ ist der Abschluß von $\mathcal{L}$ unter Abbildung durch ϵ-ausgabefreie a-Transducer.*
   (c) $\mathcal{L}_1 = \mathcal{M}(\mathcal{L})$
   (d) $\mathcal{L}_1 = \{h_2(h_1^{-1}(L) \cap R) \mid L \in \mathcal{L}, h_1$ Homomorphismus, h_2 nichtlöschender Homomorphismus$\}$

2. *Die folgenden Aussagen für eine Sprachklasse $\mathcal{L}_2$ sind äquivalent:*
   (a) *$\mathcal{L}_2$ ist die kleinste volle Semi-AFL, die $\mathcal{L}$ enthält.*
   (b) *$\mathcal{L}_2$ ist der Abschluß von $\mathcal{L}$ unter Abbildung durch a-Transducer.*
   (c) $\mathcal{L}_2 = \hat{\mathcal{M}}(\mathcal{L})$
   (d) $\mathcal{L}_2 = \{h_2(h_1^{-1}(L) \cap R) \mid L \in \mathcal{L}, h_1$ und h_2 Homomorphismen$\}$

Corollar 6 *Falls $\mathcal{L}$ eine Semi-AFL, $L \in \mathcal{L}$ und M ein ϵ-ausgabegrenzter a-Transducer ist, dann ist $M(L) \setminus \{\epsilon\}$ in $\mathcal{L}$.*

Corollar 7 *Falls $\mathcal{L}$ eine Semi-AFL ist, dann ist $\mathcal{R}_0 \subseteq \mathcal{L}$; für $\{\epsilon\} \in \mathcal{L}$ gilt $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}$.*

Corollar 8 *Für eine ϵ-freie reguläre Menge R gilt $\mathcal{M}(R) = \mathcal{R}_0$; falls R ϵ enthält, gilt $\mathcal{M}(R) = \mathcal{R}$.*

Corollar 9 *Für eine ϵ-freie reguläre Menge R und ein Wort w existiert ein ϵ-ausgabefreier a-Transducer M mit $R = M(w)$; falls R regulär ist, existiert ein ϵ-ausgabefreier a-Transducer M mit $R = M(\epsilon)$.*

Definition 1.1.10 *Falls $\mathcal{L} = \mathcal{M}(L)$ für ein $L \in \mathcal{L}$, dann ist $\mathcal{L}$ eine* principal Semi-AFL*; falls $\mathcal{L} = \hat{\mathcal{M}}(L)$, ist $\mathcal{L}$ eine* volle principal Semi-AFL.

Definition 1.1.11 (Links- und Rechtsquotient von Sprachen) *Für Sprachen L_1 und L_2 seien die Operationen* Links- und Rechtsquotient *wie folgt definiert:*
$L_1/L_2 = \{x \mid \exists y \in L_2, xy \in L_1\}$ *ist der* Rechtsquotient *von L_1 durch L_2.*
$L_2 \backslash L_1 = \{x \mid \exists y \in L_2, yx \in L_1\}$ *ist der* Linksquotient *von L_1 durch L_2.*

Satz 1.1.4 (Abschlußeigenschaften von Semi-AFLs)

1. *Eine Semi-AFL ist abgeschlossen unter:*
   - *Substitution durch ϵ-freie reguläre Mengen,*
   - *Schnitt mit regulären Mengen,*
   - *Abbildung durch ϵ-ausgabefreie begrenzte a-Transducer (ohne ϵ) und*

- *Konkatenation und Vereinigung mit regulären Mengen.*

2. *Eine principal Semi-AFL ist zusätzlich abgeschlossen unter Vereinigung.*
3. *Eine volle Semi-AFL ist zusätzlich abgeschlossen unter:*
   - *Substitution durch beliebige reguläre Mengen und*
   - *Quotienten mit regulären Mengen.*

Corollar 10 *Eine volle AFL ist abgeschlossen unter Quotienten mit regulären Mengen.*

Corollar 11 *Die Klasse der regulären Mengen ist unter Quotienten mit regulären Mengen abgeschlossen.*

Corollar 12 *Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist unter Quotienten mit regulären Mengen abgeschlossen.*

Corollar 13 *Für eine AFL* $\mathcal{L}$ *gilt* $\mathcal{L} = \mathcal{L}\,\sigma\,\mathcal{R}$. *Für eine volle AFL* $\mathcal{L}$ *gilt* $\mathcal{L} = \mathcal{L}\,\hat{\sigma}\,\mathcal{R}$.

1.2 Charakterisierung von AFLs

Lemma 1.2.1 *Seien* $\mathcal{L}_1$ *und* $\mathcal{L}_3$ *Sprachfamilien und* $\mathcal{L}_2$ *eine unter längenerhaltendem eins-zu-eins- Homomorphismus abgeschlossene Sprachfamilie. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1\,\sigma\,(\mathcal{L}_2\,\sigma\,\mathcal{L}_3) &= (\mathcal{L}_1\,\sigma\,\mathcal{L}_2)\,\sigma\,\mathcal{L}_3 \\ \mathcal{L}_1\,\hat{\sigma}\,(\mathcal{L}_2\,\hat{\sigma}\,\mathcal{L}_3) &= (\mathcal{L}_1\,\hat{\sigma}\,\mathcal{L}_2)\,\hat{\sigma}\,\mathcal{L}_3 \end{aligned}$$

Definition 1.2.1 *Ein Homomorphismus* h *heißt* ϵ-beschränkt auf einer Sprache L, *falls ein* $k \geq 0$ *existiert mit* $(xyz \in L \wedge h(y) = \epsilon) \Rightarrow |y| \leq k$

Corollar 14 *Sei* $\mathcal{L}$ *eine Semi-AFL,* $L \in \mathcal{L}$ *und* h *ein* ϵ*-beschränkter Homomorphismus auf* L. *Dann gilt* $h(L) \setminus \{\epsilon\} \in \mathcal{L}$.

Lemma 1.2.2 *Sei* $\mathcal{L}$ *eine Sprachklasse, die mindestens eine Menge* $\{c, \epsilon\}$ *enthält und unter Substitution durch* ϵ*- freie reguläre Mengen, Schnitt mit regulären Mengen und* ϵ*- beschränkten Homomorphismen abgeschlossen ist. Dann ist* $\mathcal{L}$ *unter inversen Homomorphismen abgeschlossen.*

Corollar 15 *Sei* $\mathcal{L}$ *eine nichttriviale,* ϵ*-freie Sprachklasse, die unter Substitution durch* ϵ*-freie reguläre Mengen und Schnitt mit regulären Mengen abgeschlossen ist. Sei weiterhin* $h(L) \setminus \{\epsilon\} \in \mathcal{L}$ *falls* $L \in \mathcal{L}$ *und* h *auf* L ϵ*-beschränkt ist. Dann ist* $\mathcal{L}$ *unter inversen Homomorphismen abgeschlossen.*

Satz 1.2.1 *Sei* $\mathcal{L}$ *eine Sprachfamilie.*

1. *$\mathcal{L}$ ist eine volle AFL genau dann, wenn $\mathcal{L}$ mindestens eine Menge $\{c\}$ mit festem c enthält und unter Substitution in, Substitution durch und Schnitt mit regulären Mengen abgeschlossen ist.*

2. *$\mathcal{L}$ ist eine AFL, die $\{\epsilon\}$ enthält, genau dann, wenn $\mathcal{L}$ mindestens eine Menge $\{c, \epsilon\}$, $c \neq \epsilon$ enthält und unter Substitution in und Schnitt mit regulären Mengen, Substitution durch ϵ-freie reguläre Mengen und unter ϵ-beschränkten Homomorphismen abgeschlossen ist.*

3. *$\mathcal{L}$ ist eine ϵ-freie AFL genau dann, wenn $\mathcal{L}$ ϵ-frei und nichttrivial ist, unter Schnitt mit regulären Mengen sowie Substitution in und Substitution durch ϵ-freie reguläre Mengen abgeschlossen ist und für alle auf L ϵ-beschränkten Homomorphismen, $L \in \mathcal{L}$, die Menge $h(L) \setminus \{\epsilon\}$ enthält.*

Satz 1.2.2 (AFL-Zerlegungssatz) *Für eine nichttriviale Sprachfamilie $\mathcal{L}$ gilt:*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\mathcal{L}) &= \mathcal{R}_0\, \hat{\sigma}\, \mathcal{M}(\mathcal{L}) \\ \hat{\mathcal{F}}(\mathcal{L}) &= \mathcal{R}_0\, \hat{\sigma}\, \hat{\mathcal{M}}(\mathcal{L})\end{aligned}$$

Corollar 16 *Für eine Sprache $L \neq \emptyset$ gilt:*

$$\mathcal{F}(L) = \mathcal{R}_0\, \hat{\sigma}\, \mathcal{M}(L)$$
$$\hat{\mathcal{F}}(L) = \mathcal{R}_0\, \hat{\sigma}\, \hat{\mathcal{M}}(L)$$

Definition 1.2.2 *Für eine Sprachfamilie $\mathcal{L}$ sei*

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\mathcal{L}) &= \{h(L) \mid L \in \mathcal{L}, h \text{ nichtlöschender Homomorphismus}\} \\ \hat{\mathcal{H}}(\mathcal{L}) &= \{h(L) \mid L \in \mathcal{L}, h \text{ Homomorphismus}\}\end{aligned}$$

Satz 1.2.3 *Für eine Sprachfamilie $\mathcal{L}$ gilt*

$$\hat{\mathcal{F}}(\mathcal{L}) = \hat{\mathcal{H}}(\mathcal{F}(\mathcal{L}))$$

Corollar 17 *Für eine Sprachfamilie $\mathcal{L}$ gilt $\hat{\mathcal{M}}(\mathcal{L}) = \hat{\mathcal{H}}(\mathcal{M}(\mathcal{L}))$.*

Corollar 18 *Für eine Sprache L gilt $\hat{\mathcal{F}}(L) = \hat{\mathcal{H}}(\mathcal{F}(L))$.*

Corollar 19 *Für eine Sprache L gilt $\hat{\mathcal{M}}(L) = \hat{\mathcal{H}}(\mathcal{M}(L))$.*

Corollar 20 *Sei $\mathcal{L}$ eine Sprachfamilie. Für $L \in \hat{\mathcal{M}}(\mathcal{L})$ existieren eine Sprache $L' \in \mathcal{M}(\mathcal{L})$, ein Symbol c und ein Homomorphismus h mit $h(c) = \epsilon$, $h(a) = a$ sonst, so daß $L = h(L')$.*

Corollar 21 *Sei $\mathcal{L}$ eine Sprachfamilie. Für $L \in \hat{\mathcal{F}}(\mathcal{L})$ existieren eine Sprache $L' \in \mathcal{F}(\mathcal{L})$ und ein Symbol c, so daß $L = h(L')$. Dabei ist h der Homomorphismus, der c löscht und überall sonst die Identität ist.*

2 Automaten mit endlicher Zustandskontrolle

2.1 AFAs (Abstract Families of Automata)

Definition 2.1.1 (AFA-Schema) *Ein* AFA-Schema *ist ein Quadrupel* $\Omega = (\Gamma, I, f, g)$ *mit folgenden Elementen:*

1. Γ *ist eine Menge von* Speichersymbolen*;*

2. I *ist eine Menge von* Anweisungen*;*

3. g *ist eine partielle Funktion von* Γ^* *nach* Γ^**, genannt die* Speicherinformationsfunktion*;*

4. f *ist eine partielle Funktion von* $\Gamma^* \times I$ *nach* Γ^**, genannt die* Speicherüberführungsfunktion*;*

5. f *und* g *erfüllen folgende Einschränkungen:*

   (a) $g(x) = \epsilon \Leftrightarrow x = \epsilon$

   (b) *Für jedes* $\gamma \in g(\Gamma^*)$ *existiert ein* $u_\gamma \in I$ *so daß* $g(x) = \gamma \Rightarrow f(x, u_\gamma) = x$.

   (c) *Für jedes* $u \in I$ *existiert eine endliche Menge* $\Gamma_u \subseteq \Gamma$ *so daß* $x \in \Gamma_I^* \Rightarrow f(x, u) \in (\Gamma_u \cup \Gamma_I)^*$.

Definition 2.1.2 *Ein AFA-Schema* $\Omega = (\Gamma, I, f, g)$ *heißt* endlich codiert*, wenn* $I \cup g(\Gamma^*)$ *endlich ist.*

Definition 2.1.3 (AFA) *Gegeben sei eine feste abzählbar unendliche Menge von Zuständen* K *und eine feste unendliche Menge von Eingabesymbolen* Σ. *Eine* AFA (Abstract Family of Automata) *ist ein Paar* $(\Omega, \mathcal{D})$ *(oder einfach nur* $\mathcal{D}$*) mit den Eigenschaften:*

1. $\Omega = (\Gamma, I, f, g)$ *ist ein AFA-Schema.*

2. $\mathcal{D}$ *ist die Klasse aller Akzeptoren* $D = (K_1, \Sigma_1, \delta, q_0, F_1)$ *mit*

   (a) $K_1 \subset K$ *ist eine endliche Menge von Zuständen,* $q_0 \in K_1$ *und* $F_1 \subseteq K_1$

   (b) $\Sigma_1 \subset \Sigma$ *ist eine endliche Menge von Eingabesymbolen*

   (c) δ *ist eine Funktion von* $K_1 \times (\Sigma_1 \cup \{\epsilon\}) \times g(\Gamma^*)$ *in die endlichen Teilmengen von* $K_1 \times I$ *so daß*

   $$G_D = \{\gamma \mid \exists q \in K_1,\, a \in (\Sigma_1 \cup \{\epsilon\}) : \delta(q, a, \gamma) \neq \emptyset\}$$

   endlich ist.

Definition 2.1.4 *Eine* Momentanbeschreibung *von* D *ist ein Element von* $K_1 \times \Sigma_1^* \times \Gamma^*$.

Definition 2.1.5 *Die* Relation $\vdash_D$ *sei für Momentanbeschreibungen von D wie folgt definiert: Falls $(q', u) \in \delta(q, a, \gamma)$, $g(x) = \gamma$, $f(x, u)$ definiert ist und $w \in \Sigma_1^*$, dann ist $(q, aw, x) \vdash_D (q', w, f(x, u))$.*

Seien C, C' und C'' Momentanbeschreibungen. Dann ist $C \vdash_D^0 C$. Falls $C \vdash_D^n C'$ und $C' \vdash_D C''$, dann ist $C \vdash_D^{n+1} C''$. Falls $C \vdash_D^n C'$ für ein $n \geq 0$, dann gilt $C \vdash_D^* C'$.

Definition 2.1.6 *Ein Akzeptor D erkennt die Sprache*

$$L(D) = \{w \mid \exists f \in F_1, (q_0, w, \epsilon) \vdash_D^* (f, \epsilon, \epsilon)\}$$

Definition 2.1.7 *Ein Akzeptor D* läuft in Quasirealzeit, *wenn ein k existiert, so daß für alle q, q', x, x' gilt: $(q, \epsilon, x) \vdash_D^n (q', \epsilon, x') \Rightarrow n \leq k$.*

D ist ϵ-frei *falls* $\delta(q, \epsilon, \gamma) = \emptyset$ (undefiniert) *für alle* $q \in K_1, \gamma \in G_D$.

Definition 2.1.8

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathcal{D}) &= \{L(D) \mid D \in \mathcal{D}\} \\ \mathcal{L}^t(\mathcal{D}) &= \{L(D) \mid D \in \mathcal{D}, D \text{ läuft in Quasirealzeit}\} \end{aligned}$$

Definition 2.1.9 *Die* reguläre AFA *ist die AFA $(\Omega_R, \mathcal{D}_R)$, $\Omega_R = (\emptyset, \{\epsilon\}, f_R, g_R)$ mit wie folgt definierten Funktionen:*

$$f_R(\epsilon, \epsilon) = g_R(\epsilon) = \epsilon$$

Definition 2.1.10 *Die* PDA-AFA *ist die AFA $(\Omega_P, \mathcal{D}_P)$, $\Omega_P = (\Gamma, \Gamma^*, f_P, g_P)$ mit wie folgt definierten Funktionen:*

$$\begin{aligned} f_P(\epsilon, u) &= u \text{ für } u \in \Gamma^* \\ f_P(Ax, u) &= ux \text{ für } A \in \Gamma,\ x, u \in \Gamma^* \\ g_P(\epsilon) &= \epsilon \\ g_P(Ax) &= A \text{ für } A \in \Gamma,\ x, u \in \Gamma^* \end{aligned}$$

Definition 2.1.11 *Ist $(\Omega, \mathcal{D})$ eine AFA mit $\mathcal{L}^t(\mathcal{D}) = \mathcal{L}$, dann ist $(\Omega, \mathcal{D})$ eine* Repräsentation von (repräsentiert) $\mathcal{L}$.

Ist $(\Omega, \mathcal{D})$ eine AFA mit $\mathcal{L}(\mathcal{D}) = \mathcal{L}$, dann ist $(\Omega, \mathcal{D})$ eine volle Repräsentation von $\mathcal{L}$ *(*repräsentiert $\mathcal{L}$ voll*)*.

Corollar 22 *$(\Omega_R, \mathcal{D}_R)$ repräsentiert $\mathcal{R}$ und repräsentiert $\mathcal{R}$ voll.*

Corollar 23 *$(\Omega_P, \mathcal{D}_P)$ repräsentiert $\mathcal{CFL}$ und repräsentiert $\mathcal{CFL}$ voll.*

Definition 2.1.12 *Sind $(\Omega, \mathcal{D})$, $\Omega = (\Gamma, I, f, g)$ und $(\Omega', \mathcal{D}')$, $\Omega' = (\Gamma', I', f', g')$ beide AFAs, dann ist $(\Omega', \mathcal{D}')$ eine* Sub-AFA *von $(\Omega, \mathcal{D})$, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. $\Gamma' \subseteq \Gamma$, $I' \subseteq I$

2. *Für alle* $x \in \Gamma'^*$, $u \in I'$ *gilt* $f'(x,u) = f(x,u)$.

3. $\exists H \subseteq g(\Gamma^*)$ *so daß für alle* $x \in \Gamma'^*$ *gilt:*

$$g'(x) = \begin{cases} g(x) & \text{falls } g(x) \text{ definiert ist und in } H \text{ liegt} \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

Corollar 24 *Ist* $(\Omega', \mathcal{D}')$ *eine Sub-AFA von* $(\Omega, \mathcal{D})$*, dann ist* $\mathcal{L}^t(\mathcal{D}') \subseteq \mathcal{L}^t(\mathcal{D})$ *und* $\mathcal{L}(\mathcal{D}') \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{D})$.

Corollar 25 *Für jede AFA* $(\Omega, \mathcal{D})$ *gilt:* $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{L}^t(\mathcal{D})$.

Definition 2.1.13 *Eine AFA* $(\Omega, \mathcal{D})$ *heißt* endlich codiert*, falls* Ω *ein endlich codiertes AFA-Schema ist. Eine AFA* $(\Omega, \mathcal{D})$ *heißt* endlich codierbar *wenn es eine endlich codierte Sub-AFA* $(\Omega', \mathcal{D}')$ *mit* $\mathcal{L}^t(\mathcal{D}) = \mathcal{L}^t(\mathcal{D}')$ *gibt.*

2.2 AFA-Sprachen und das AFL-Lemma

Die sechs folgenden Lemmata sind auf eine feste AFA $(\Omega, \mathcal{D})$, $\Omega = (\Gamma, I, f, g)$ und einen Quasirealzeit-Akzeptor $D = (K_1, \Sigma_1, \delta_1, q_0, F_1)$, $D \in \mathcal{D}$ bezogen.

Lemma 2.2.1 $\mathcal{L}^t(\mathcal{D})$ *ist abgeschlossen unter Schnitt mit regulären Mengen.*

Lemma 2.2.2 $\mathcal{L}^t(\mathcal{D})$ *ist abgeschlossen unter Vereinigung.*

Lemma 2.2.3 $\mathcal{L}^t(\mathcal{D})$ *ist abgeschlossen unter inversen Homomorphismen.*

Lemma 2.2.4 $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ *ist abgeschlossenunter Homomorphismen, und* $\mathcal{L}^t(\mathcal{D})$ *ist abgeschlossen unter nichtlöschenden Homomorphismen.*

Lemma 2.2.5 $\mathcal{L}^t(\mathcal{D})$ *ist abgeschlossen unter Konkatenation.*

Lemma 2.2.6 $\mathcal{L}^t(\mathcal{D})$ *ist abgeschlossen unter Kleene+.*

Satz 2.2.1 *Wenn* $(\Omega, \mathcal{D})$ *eine AFA ist, dann ist* $\mathcal{L}^t(\mathcal{D})$ *eine AFL, die* $\{\epsilon\}$ *enthält.*

Lemma 2.2.7 *Wenn* D *ein Akzeptor in der AFA* $\mathcal{D}$ *ist, dann gibt es einen* ϵ*-freien Akzeptor* D' *und einen Homomorphismus* h *mit*

1. $L(D) = h(L(D'))$,

2. *wenn* D *in Quasirealzeit läuft, ist* h *auf* $L(D')$ ϵ*-beschränkt und*

3. *es gibt ein Symbol* c *so daß* $h(c) = \epsilon$ *und* $h(a) = a$ *für alle* $a \neq c$.

Satz 2.2.2 *Sei* $(\Omega, \mathcal{D})$ *eine AFA. Dann ist* $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ *eine volle AFL und*

$$\mathcal{L}(\mathcal{D}) = \hat{\mathcal{H}}(\mathcal{L}^t(\mathcal{D})) = \hat{\mathcal{F}}(\mathcal{L}^t(\mathcal{D}))$$

2.3 Endlich codierte AFAs

Lemma 2.3.1 *Sei $(\Omega, \mathcal{D})$, $\Omega = (\Gamma, I, f, g)$ eine AFA. Falls $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$, $I_0 \subseteq I$ und $H \subseteq g(\Gamma^*)$, dann definiert (Γ_0, I_0, H) eine Sub-AFA von $\mathcal{D}$, $(\Omega_1, \mathcal{D}_1)$, $\Omega_1 = (\Gamma_1, I_1, f_1, g_1)$ so daß folgende Bedingungen gelten:*

1. $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1, I_0 \subseteq I_1$,
2. $g_1(x) = g(x)$ *für* $g(x) \in H \cup \{\epsilon\}$, $g(x) = \emptyset$ *sonst,*
3. *Falls* $I_0 \cup H$ *endlich ist, ist* Ω_1 *endlich codiert, und*
4. *falls D ein Akzeptor aus $\mathcal{D}$ ist, dessen Instruktionen in I_0 liegen und für den $G_D \subseteq H \cup \{\epsilon\}$ gilt, dann ist $D \in \mathcal{D}$.*

Corollar 26 *Falls D ein Akzeptor ist, der ausschließlich Instruktionen aus I_0 benutzt, dann ist D in der Sub-AFA, die durch $(\emptyset, I_0, G_D)$ beschrieben wird, enthalten und definiert die selbe Sprache.*

Lemma 2.3.2 *Sei $(\Omega, \mathcal{D})$ eine AFA. Dann gilt:*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^t(\mathcal{D}) &= \bigcup_{\mathcal{D}' \text{ endl. cod. Sub-AFA v. } \mathcal{D}} \mathcal{L}^t(\mathcal{D}') \\
\mathcal{L}(\mathcal{D}) &= \bigcup_{\mathcal{D}' \text{ endl. cod. Sub-AFA v. } \mathcal{D}} \mathcal{L}(\mathcal{D}')
\end{aligned}$$

Satz 2.3.1 *Sei $\mathcal{D}$ eine AFA.*

1. *Wenn $\mathcal{L}^t(\mathcal{D})$ eine principal AFL ist, dann ist $\mathcal{L}^t(\mathcal{D}) = \mathcal{L}^t(\mathcal{D}')$ für eine endlich codierte Sub-AFA $\mathcal{D}'$ von $\mathcal{D}$; das heißt, $\mathcal{L}^t(\mathcal{D})$ hat eine endlich codierte Repräsentation, die eine Sub-AFA von $\mathcal{D}$ ist.*
2. *Wenn $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ eine volle principal AFL ist, dann ist $\mathcal{L}(\mathcal{D}) = \mathcal{L}(\mathcal{D}')$ für eine endlich codierte Sub-AFA $\mathcal{D}'$ von $\mathcal{D}$; das heißt, $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ hat eine endlich codierte volle Repräsentation, die eine Sub-AFA von $\mathcal{D}$ ist.*

Definition 2.3.1 *Eine* 0*-Schritt-Berechnung hat die* Spur ϵ.

Ist $(q', u) \in \delta(q, a, \gamma)$, $g(x) = \gamma$ und $f(x, u) \neq \emptyset$, dann ist (γ, u) eine Spur *der* 1- *Schritt-Berechnung* $(q, aw, x) \vdash_D (q', w, f(x, u))$.

Ist $(\gamma_1, u_1) \dots (\gamma_n, u_n)$ die Spur einer n- Schritt-Berechnung $C \vdash_D^n C', n \leq 1$ und (γ_{n+1}, u_{n+1}) die Spur der 1-Schritt-Berechnung $C' \vdash_D C''$, dann ist $(\gamma_1, u_1) \dots (\gamma_n, u_n)(\gamma_{n+1}, u_{n+1})$ die Spur *der $n+1$-Schritt-Berechnung $C \vdash_D^{n+1} C''$.*

Definition 2.3.2 L_D *ist die* Menge aller Spuren aller akzeptierenden Berechnungen von D.

Lemma 2.3.3 *Sei $(\Omega, \mathcal{D})$, $\Omega = (\Gamma, I, f, g)$ eine AFA und $D = (K_1, \Sigma_1, \delta, q_0, F_1)$ ein Akzeptor in $\mathcal{D}$. Wenn $(\gamma_1, u_1) \dots (\gamma_n, u_n)$ die Spur einer Berechnung aus L_D ist, dann ist*

1. $\gamma_1 = \epsilon$,
2. $f(\epsilon, u_1 \ldots u_n) = \epsilon$ *und*
3. $\gamma_{i+1} = g(f(\epsilon, u_1 \ldots u_i))$ *für* $1 \leq i \leq n$.

Definition 2.3.3 *Sei* $(\Omega, \mathcal{D})$ *eine endlich codierte AFA. Sei*

$$\Sigma_{\mathcal{D}} = \{(\gamma, u) \mid \gamma \in g\,(\Gamma^*) \text{ und } u \in I\}$$

Der natürliche Generator von $\mathcal{D}$ *ist die wie folgt definierte Teilmenge von* $\Sigma_{\mathcal{D}}^*$*:*

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{D}} \quad = \quad & \{\epsilon\} \cup \{(\gamma_1, u_1) \ldots (\gamma_n, u_n) \mid \gamma_1 = \epsilon = f(\epsilon, u_1 \ldots u_n), \\ & \gamma_{i+1} = g(f(\epsilon, u_1 \ldots u_i)) \text{ für } 1 \leq i \leq n\} \end{aligned}$$

Corollar 27 *Wenn* D *ein Akzeptor einer endlich codierten AFA* $\mathcal{D}$ *ist, dann ist* $L_D \subseteq L_{\mathcal{D}}$.

Lemma 2.3.4 *Sei* $\mathcal{D}$ *eine endlich codierte AFA. Es existiert ein* ϵ*-freier Akzeptor* $D \in \mathcal{D}$ *mit* $L(D) = L_D = L_{\mathcal{D}}$.

Corollar 28 $\mathcal{F}(L_{\mathcal{D}}) \subseteq \mathcal{L}^t(\mathcal{D})$.

Lemma 2.3.5 *Sei* D *ein* ϵ*-freier Akzeptor in einer AFA* $\mathcal{D}$*. Es existiert ein* ϵ*-ausgabefreier a-Transducer* M*, für den* $L(D) = M(L_D)$ *gilt und, falls* $\mathcal{D}$ *endlich codiert ist,* $L(D) = M(L_{\mathcal{D}})$.

Satz 2.3.2 *Für eine endlich codierte AFA* $\mathcal{D}$ *gilt*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^t(\mathcal{D}) &= \mathcal{F}(L_{\mathcal{D}}) = \mathcal{M}(L_{\mathcal{D}}) \\ \mathcal{L}(\mathcal{D}) &= \hat{\mathcal{F}}(L_{\mathcal{D}}) = \hat{\mathcal{M}}(L_{\mathcal{D}}) \end{aligned}$$

Corollar 29 *Wenn* $\mathcal{D}$ *eine endlich codierte AFA ist, ist* $\mathcal{L}^t(\mathcal{D})$ *eine principal AFL und eine principal Semi-AFL, und* $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ *ist eine volle principal AFL und eine volle principal Semi-AFL.*

2.4 Das Principal AFL-Theorem

Definition 2.4.1 *Sei* $L \subseteq \Sigma_1^*$ *über einem endlichen Alphabet* Σ_1*,* u_L *ein neues Symbol und* A *ein festes Element von* Σ_1*. Seien weiterhin* $\Gamma_L = \Sigma_1$*,* $I_L = \Sigma_1 \cup \{\epsilon, u_L\}$ *und*

$$\begin{aligned} g_L(\epsilon) &= \epsilon, \\ g_L(x) &= A \text{ für alle } x \in \Sigma_1^+, \\ f_L(x, a) &= xa \text{ für alle } x \in \Sigma_1^*, a \in \Sigma_1 \cup \{\epsilon\}, \\ f_L(x, u_L) &= \epsilon \text{ für alle } x \in L, \\ f_L(x, u_L) &= \emptyset \text{ für alle } x \notin L \end{aligned}$$

Sei $\Omega_L = (\Gamma_L, I_L, f_L, g_L)$.

Corollar 30 *Ω_L ist ein endlich codiertes AFA-Schema.*

Lemma 2.4.1 *$L \in \mathcal{L}^t(\mathcal{D}_L)$.*

Definition 2.4.2 *$MinL = \{w \in L \mid w = xy \Rightarrow w = x \vee w = y \vee x \notin L\}$.*

Lemma 2.4.2 *Wenn L der natürliche Generator einer endlich codierten AFA ist, dann ist $L = (MinL)^*$.*

Definition 2.4.3 *Zwei Sprachen L und L' sind* äquivalent, *wenn $\mathcal{F}(L) = \mathcal{F}(L')$. Sie sind m-* äquivalent, *wenn $\mathcal{M}(L) = \mathcal{M}(L')$.*

Lemma 2.4.3 *Seien $L \subseteq \Sigma_1^*$ und c ein Symbol, das nicht in Σ_1 enthalten ist. Dann ist $(Lc)^*$ m-äquivalent zum natürlichen Generator von $(\Omega_L, \mathcal{D}_L)$.*

Satz 2.4.1 *Für eine beliebige Sprache L existiert eine endlich codierte AFA $\mathcal{D}_L$, so daß für ein Symbol $c \notin \Sigma_L$ gilt:*

$$\begin{array}{rcccl} \mathcal{L}^t(\mathcal{D}_L) & = & \mathcal{F}(L \cup \{\epsilon\}) & = & \mathcal{M}((Lc)^*) \\ \mathcal{L}(\mathcal{D}_L) & = & \hat{\mathcal{F}}(L \cup \{\epsilon\}) & = & \hat{\mathcal{M}}((Lc)^*) \end{array}$$

Corollar 31 *Eine AFL, die ϵ enthält, ist genau dann eine principal AFL, wenn sie durch eine endlich codierte AFA repräsentiert wird.*

Corollar 32 *Eine volle AFL ist genau dann eine volle principal AFL, wenn sie eine endlich codierte volle Repräsentation hat.*

Corollar 33 *Eine AFL $\mathcal{L}$ ist genau dann eine principal AFL, wenn es eine endlich codierte Repräsentation für $\mathcal{F}(\mathcal{L} \cup \{\epsilon\}) = \mathcal{R}_0\, \hat{\sigma}\, (\mathcal{L} \cup \{\epsilon\})$ gibt.*

Corollar 34 *Für eine nichtleere Sprache L und ein neues Symbol c gelten*

$$\begin{array}{rcccl} \mathcal{F}(L \cup \{\epsilon\}) & = & \mathcal{M}((Lc)^*) & & \\ \mathcal{F}(L - \{\epsilon\}) & = & \mathcal{M}((Lc)^+) & & \\ \hat{\mathcal{F}}(L) & = & \hat{\mathcal{M}}((Lc)^*) & = & \hat{\mathcal{M}}((Lc)^+) \end{array}$$

Corollar 35 *Jede principal AFL ist eine principal Semi-AFL, und jede volle principal AFL ist eine volle principal Semi-AFL.*

Satz 2.4.2 (Principal AFL Theorem)

1. *Eine Sprachklasse, die $\{\epsilon\}$ enthält, ist eine principal AFL genau dann, wenn sie*
   - *durch eine endlich codierte AFA repräsentiert wird,*
   - *eine AFA-Repräsentation hat und jede Repräsentation eine endlich codierte Sub-AFA besitzt, die auch eine Repräsentation ist oder*
   - *eine AFA-Repräsentation hat und jede AFA-Repräsentation endlich codierbar ist.*

2. *Eine Sprachklasse ist eine volle principal AFL genau dann, wenn sie*

   - *durch eine endlich codierte AFA voll repräsentiert wird oder*
   - *eine volle AFA-Repräsentation hat und jede volle Repräsentation eine endlich codierte Sub-AFA besitzt, die auch eine volle Repräsentation ist.*

A Verwendete Begriffe und Definitionen

A.1 a-Transducer

$M = (K, \Sigma_1, \Delta, H, q_0, F)$	a-Transducer mit $H \subseteq K \times \Sigma_1^* \times \Delta^* \times K$
$\gamma_M(K \times \Sigma_1^* \times K)$	Ausgabefunktion eines a-Transducers M
$M(L)$	Abbildung durch a-Transducer
$M^{-1}(L)$	inverse Abbildung durch a-Transducer
M ist ϵ-ausgabefrei	$H \subseteq K \times \Sigma_1^* \times \Delta^+ \times K$
M ist ϵ-eingabefrei	$H \subseteq K \times \Sigma_1^+ \times \Delta^* \times K$
M ist 1-bounded	$H \subseteq K \times (\Sigma_1 \cap \{\epsilon\}) \times (\Delta \cap \{\epsilon\}) \times K$
M ist ϵ-ausgabebegrenzt	$\exists k \geq 0 \mid \epsilon \notin \gamma_M(q, w, q')$ für $\|w\| > k$
M ist ϵ-eingabebegrenzt	$\exists k \geq 0 \mid w \in \gamma_M(q, e, q') \Rightarrow \|w\| \leq k$

A.2 Sprachfamilien

Semi-AFL	nichttriviale, unter h_{nl}, h^{-1} und $\cap R$ abg. Sprachfamilie
Volle Semi-AFL	unter h abgeschlossene Semi-AFL
AFL	unter $\cup$, $\cdot$ und Kleene+ abgeschlossene Semi-AFL
Volle AFL	unter h abgeschlossene AFL
$\mathcal{F}(\mathcal{L})$	kleinste AFL, die $\mathcal{L}$ enthält
$\hat{\mathcal{F}}(\mathcal{L})$	kleinste volle AFL, die $\mathcal{L}$ enthält
$\mathcal{L} = \mathcal{F}(L), L \in \mathcal{L}$	$\mathcal{L}$ ist principal AFL; L ist Generator von $\mathcal{L}$
$\mathcal{L} = \hat{\mathcal{F}}(L), L \in \mathcal{L}$	$\mathcal{L}$ ist volle principal AFL; L ist Generator von $\mathcal{L}$
$\mathcal{M}(\mathcal{L})$	$\{M(L) \mid L \in \mathcal{L},$ M ist ein ϵ- ausgabefreier a-Transducer$\}$
$\hat{\mathcal{M}}(\mathcal{L})$	$\{M(L) \mid L \in \mathcal{L},$ M ist ein a-Transducer$\}$
$\mathcal{L} = \mathcal{M}(L), L \in \mathcal{L}$	$\mathcal{L}$ ist principal Semi-AFL
$\mathcal{L} = \hat{\mathcal{M}}(L), L \in \mathcal{L}$	$\mathcal{L}$ ist volle principal Semi-AFL
$\mathcal{H}(\mathcal{L})$	$\{h(L) \mid L \in \mathcal{L}, h$ nichtlöschender Homomorphismus$\}$
$\hat{\mathcal{H}}(\mathcal{L})$	$\{h(L) \mid L \in \mathcal{L}, h$ Homomorphismus$\}$

A.3 Operationen auf Sprachen und Sprachklassen

$\tau(L)$	Substitution in L
$\tau(a) \in \mathcal{L}$ für alle a	$\mathcal{L}$- Substitution
$\mathcal{L}_1 \, \sigma \, \mathcal{L}_2$	$\{\tau(L) \mid L \in \mathcal{L}_1,$ τ ist eine ϵ- freie $\mathcal{L}_2$-Substitution$\}$
$\mathcal{L}_1 \, \hat{\sigma} \, \mathcal{L}_2$	$\{\tau(L) \mid L \in \mathcal{L}_1,$ τ ist eine $\mathcal{L}_2$-Substitution$\}$
L_1/L_2	$\{x \mid \exists y \in L_2, xy \in L_1\}$ Rechtsquotient von L_1 durch L_2
$L_2 \backslash L_1$	$\{x \mid \exists y \in L_2, yx \in L_1\}$ Linksquotient von L_1 durch L_2
$MinL$	alle präfixfreien Worte von L
L äquivalent L'	$\mathcal{F}(L) = \mathcal{F}(L')$
L m-äquivalent L'	$\mathcal{M}(L) = \mathcal{M}(L')$

A.4 AFA-Schemata und Akzeptoren

$\Omega = (\Gamma, I, f, g)$	AFA-Schema
Ω ist endlich codiert	$I \cup g(\Gamma^*)$ ist endlich
Ω_L	auf einer Sprache L konstruiertes AFA-Schema
$D = (K_1, \Sigma_1, \delta, q_0, F_1)$	Akzeptor mit $\delta : K_1 \times (\Sigma_1 \cup \{\epsilon\}) \times g(\Gamma^*) \to$ endl. Teilmengen von $K_1 \times I$
$\mathcal{D}$	Klasse aller Akzeptoren eines AFA-Schemas
$(q, w, \gamma) \in K_1 \times \Sigma_1^* \times \Gamma^*$	Momentanbeschreibung eines Akzeptors
$(q, w, \gamma) \vdash_D^n (q', w', \gamma')$	Berechnung eines Akzeptors
$L(D)$	von D akzeptierte Sprache
D läuft in Quasirealzeit	$\lvert\epsilon$-Übergänge pro Eingabesymbol$\rvert < k$
D ϵ-frei	keine ϵ-Übergänge zugelassen
$\mathcal{L}(\mathcal{D})$	$\{L(D) \mid D \in \mathcal{D}\}$
$\mathcal{L}^t(\mathcal{D})$	$\{L(D) \mid D \in \mathcal{D}, D$ läuft in Quasirealzeit$\}$

A.5 AFAs

$(\Omega, \mathcal{D})$	AFA
$(\Omega, \mathcal{D})$ repräsentiert $\mathcal{L}$	$(\Omega, \mathcal{D})$ ist AFA mit $\mathcal{L}^t(\mathcal{D}) = \mathcal{L}$
$(\Omega, \mathcal{D})$ repräsentiert $\mathcal{L}$ voll	$(\Omega, \mathcal{D})$ ist AFA mit $\mathcal{L}(\mathcal{D}) = \mathcal{L}$
$(\Omega', \mathcal{D}')$ Sub-AFA von $(\Omega, \mathcal{D})$	Γ', I', f', g' sind jew. in Γ, I, f, g enthalten
$(\Omega, \mathcal{D})$ ist endlich codiert	Ω ist endlich codiert
$(\Omega, \mathcal{D})$ ist endlich codierbar	$\exists$ endl. codierte Sub-AFA mit $\mathcal{L}^t(\mathcal{D}) = \mathcal{L}^t(\mathcal{D}')$
$(\gamma, u), \gamma = g(x)$	Spur von $(q, aw, x) \vdash_D (q', w, f(x, u))$
L_D	alle Spuren aller akz. Berechnungen von D
$L_{\mathcal{D}}$	alle Spuren aller akz. Berechnungen von $D \in \mathcal{D}$ (natürlicher Generator von $\mathcal{D}$)