Algorithmisches Lernen
1. Übungsblatt

Adam Duck

30. April 2001

1.1 Aufgabe: Auf einer verstreuten Inselgruppe $I := \{I_1, \ldots, I_n\}$ im Südpazifik leben eine ganze Reihe von Tieren. Eine besondere Laune der Natur bringt es mit sich, dass abgesehen von einigen auf allen Inseln vorkommenden Tieren $t_1, \ldots, t_k$ auch jede Insel I_x eine nichtleere Menge $\{u_{x,1}, \ldots\}$ von ganz spezifischen Tieren aufweist, die nur dort vorkommen.

Ein dort gestrandeter Theoretiker beschließt, sich die Zeit bis zur Rettung damit zu vertreiben, eine Insel an ihrer Fauna zu erkennen und dazu das Lernmodell eines passiven Lernens zu verwenden. Ihm ist dabei bekannt, welche Tiere auf den Inseln vorkommen. Als Konzept der Insel I_x setzt er also

$$C_x := \{t_1, \ldots, t_k\} \cup \{u_{x,1}, u_{x,2}, \ldots\}$$

Glücklicherweise ist eine der dort ansässigen Gottheiten bereit als Lehrer zu fungieren. allerdings verlangt er für jedes Gegenbeispiel die Opferung eines Räucherstäbchens. (6 Punkte)

a. Wieviele Räucherstäbchen muss der Theoretiker bei sich haben, wenn er als Hypothesenklasse $\mathcal{H}$ die Konzeptklasse $\mathcal{C}$ (also die Menge der Inseln) verwendet? Dabei ist davon auszugehen, dass die Gottheit möglichst viele Räucherstäbchen geopfert haben möchte.
Lösung:
Da die Tiere $t_1, \ldots, t_k$ auf allen Inseln vorkommen, kann man sie in unserer Hypothese h weglassen und sich nur auf die übriggebliebenen einzigartigen Tiere konzentrieren. Sei nun

$$\begin{aligned} h \equiv\ & t_1 \wedge t_2 \wedge \ldots t_k \wedge \\ & \wedge u_{1,1} \wedge u_{1,2} \wedge \ldots u_{1,j_1} \\ & \wedge u_{2,1} \wedge u_{2,2} \wedge \ldots u_{2,j_2} \\ & \vdots \\ & \wedge u_{n,1} \wedge u_{n,2} \wedge \ldots u_{n,j_n} \end{aligned}$$

die Hypothese um das Konzept einer Insel zu erlernen. Wir wissen nämlich, welche Tiere auf welchen Inseln leben und können uns die negierten Literale sparen. Nun gibt uns die niedere Gottheit ein positives Gegenbeispiel. Das Beispiel mit den wenigsten

Informationen, das sie uns geben kann, hat an einer Stelle ein $\neg u_{x,j}$ – in diesem Beispiel auf der zweiten Insel:

$$\begin{aligned} c = {} & t_1 \wedge t_2 \wedge \ldots t_k \wedge \\ & \wedge u_{1,1} \wedge u_{1,2} \wedge \ldots u_{1,j_1} \\ & \wedge u_{2,1} \wedge \neg u_{2,2} \wedge \ldots u_{2,j_2} \\ & \vdots \\ & \wedge u_{n,1} \wedge u_{n,2} \wedge \ldots u_{n,j_n} \end{aligned}$$

Nun wissen wir also, dass es Insel 2 nicht sein kann. Denn wenn sie es wäre, müsste das Tier $u_{2,2}$ ja vorhanden sein.

$$\text{Gegenbeispiel}_{h_1}(C_1) = j$$

Und somit sind es für alle Inseln:

$$\text{Gegenbeispiel}_{\mathcal{H}}(\mathcal{C}) = n \cdot j$$

b. Welche Aussage macht die VC-Dimension bei diesem Problem?
Lösung:
Da ein Monom so aussieht:

$$m = t_1 \ldots t_k u_{1,1} u_{1,2} \ldots u_{1,j}$$

ist

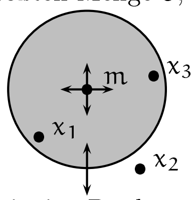
$$\mathsf{VC}(C) = k + j$$

c. Kann eine Hypothesenklasse angegeben werden, die die Schärfe dieser Schranke belegt?

1.2 Aufgabe: Einem Kreis K in der Ebene $\mathbb{R}^2$ ordnen wir die Punktmenge

$$C_{\mathsf{K}} := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x, y) \text{ liegt in } \mathsf{K}\right\}$$

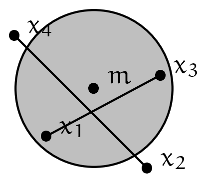
als Konzepte zu. Sei $\mathcal{C}$ die Klasse aller solcher Konzepte. Bestimmen Sie exakt die VC-Dimension dieser Konzeptklasse. (6 Punkte)
Lösung:
Wir müssen nur einen Fall finden, in dem eine Beispielmenge bestehend aus n Literalen von einem Kreis zertrümmert wird, denn "Die VC-Dimension ist die Mächtigkeit der größten Menge S, die von $\mathcal{C}$ zertrümmert wird."(*S. 14* Skript)



Bei einem Kreis in $\mathbb{R}^2$ haben wir nur zwei frei wählbare Variablen, nämlich den Kreisradius r und den Mittelpunkt m. Dabei können wir ohne weiteres einen oder zwei Punkte abgrenzen.
Auch bei drei Punkten ist das möglich, denn wir werden immer einen Kreis finden, der keinen, einen oder alle drei Punkte enthält.

Bei vier Punkten ist das aber nicht mehr möglich, denn man wird nie einen Kreis finden, der durch x_2 und x_4 geht, aber nicht durch x_1 oder x_3. Allgemeiner gesagt gibt es keinen Kreis, der die längere Diagonale enthält und die kürzere nicht.
Deswegen ist

$$\mathsf{VC}(\mathcal{C}) = 3$$



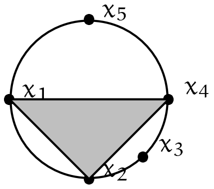
1.3 Aufgabe: Einem Dreieck D in der Ebene $\mathbb{R}^2$ ordnen wir die Punktmenge

$$C_D := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x, y) \text{ liegt in } D\right\}$$

als Konzepte zu. Sei $\mathcal{C}$ die Klasse aller solcher Konzepte. Bestimmen Sie exakt die VC-Dimension dieser Konzeptklasse. (6 Punkte)

Lösung:

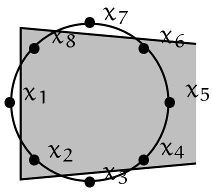
Die Lösung ist ähnlich zu Aufgabe **1.2**, jedoch werden wir diesmal die Punkte auf einem Kreis anordnen.



Hier können wir wunderbar einen, zwei, drei oder vier Punkte zertrümmern. Wenn wir z.B. auch noch x_3 in das Dreieck bekommen möchte, verlängern wir einfach $\overrightarrow{x_1x_2}$ und $\overrightarrow{x_1x_4}$ und x_3 ist drin. Wir können das fortsetzen, bis zu 7 Punkten; bei 8 ist jedoch Schluss.

Wenn man bei 8 Punkten die Punkte x_2, x_4, x_6 und x_8 in ein Dreieck bekommen möchte, ist das nicht mehr möglich. Im Beispiel wäre das zertrümmern kein Problem, wenn das x_5 nicht da wäre. Jedoch findet man kein Dreieck, das die Anforderungen erfüllt. Deshalb:

$$\mathsf{VC}(D) = 7$$



1.4 Aufgabe: In der Vorlesung wurde gezeigt, dass Winnow stets mit $\mathcal{O}(\cdot \log(n))$ Gegenbeispielen auskommt. In dieser Aufgabe bewerten wir diese Aussage an den Rändern.

a. Kann man Winnow für $k = n$ zu $\Omega(n \cdot \log(n))$ Gegenbeispielen gezwungen werden? Welche untere Schranke liefert die VC-Dimension?

b. Welche untere Schranke liefert die VC-Dimension für den Fall $k = 2$?